# Matemáticas II

## *Ejercicios de Selectividad propuestos en Castilla-La Mancha*

## Tema III. Geometría

### Puntos, rectas y planos en el espacio. Problemas métricos en el espacio

1. Estudiar la posición relativa de las rectas r y s:

$$r:\begin{cases} x+3y-4z-6=0 \\ 2x+y-3z+2=0 \end{cases} \quad ; \quad s:\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t+1 \\ z=-3t+2 \end{cases}$$

Calcular la distancia entre ambas rectas

*(Junio 1997)*

2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por A(1, 2, −1), es perpendicular a la recta $r:\begin{cases} 3y+z=7 \\ x+4y+z=8 \end{cases}$ y paralela al plano 2x + y − z = 3

*(Junio 1997)*

3. Posición relativa de la recta $\frac{x-3}{5}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{-1}$, y el plano x − 3y − z + 6 = 0. Calcular la distancia entre la recta y el plano.

*(Septiembre 1997)*

4. Ecuación de la recta que pasa por A(2, −1, 3) y es perpendicular al plano que pasa por los puntos B(1, 1, 0), C(0, −1, 2) y D(−2, 2, 1). Calcula el volumen del tetraedro ABCD.

*(Septiembre 1997)*

5. Estudiar la posición relativa de las rectas:

$$r:\begin{cases} x=-7+4t \\ y=1-t \\ z=2 \end{cases} \quad ; \quad s:\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z}{-2}$$

Hallar la ecuación de un plano que contenga a ambas rectas.

*(Junio 1998)*

6. Hallar el ángulo que forman la recta $r:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{1}$ y el plano x + 2y − z − 3 = 0. Obtener el punto de corte de la recta y el plano

*(Junio 1998)*

7. Estudiar si las rectas r y s son coplanarias. En caso afirmativo, dar la ecuación del plano que las contiene:

$$r:\begin{cases} 2x-3y+13=0 \\ 2y-z-4=0 \end{cases} \quad ; \quad s:\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{4}$$

*(Septiembre 1998)*

8. Hallar la ecuación de la recta que pasa por P(3, −4, 7) y es perpendicular al plano $\pi$: 2x − 3y + z − 11 = 0. Hallar el punto simétrico de P respecto del plano $\pi$.
*(Septiembre 1998)*

9. Hallar la ecuación de la proyección ortogonal r' de la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$ sobre el plano $\alpha$: x − 3y + 2z + 12 = 0
*(Junio 1999)*

10. Dados el punto P(2, 1, 2) y la recta $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = 4 - 3t \end{cases}$ determinar la ecuación del plano que contiene a ambos.
*(Junio 1999)*

11. Dadas las rectas $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ y $s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = -\mu \end{cases}$, hallar los puntos que dan la mínima distancia y determinar la ecuación de la perpendicular común a ambas rectas.
*(Septiembre 1999)*

12. Hallar la distancia del punto P(1, 2, 3) a la recta r de ecuaciones $r: \begin{cases} x = t \\ y = 6 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$, determinando el punto de la recta que dista menos de P.
*(Septiembre 1999)*

13. Hallar la distancia del punto P(2, 4, 1) al plano $\alpha \equiv 3x + 4y + 12z - 8 = 0$, y encontrar el punto del plano que da la mínima distancia del punto P.
*(Junio 2000)*

14. Hallar el punto simétrico del punto A(1, 2, 3) respecto de la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$
*(Junio 2000)*

15. Dados los puntos A(−2, −4, −3) y B(2, 6, 5), y la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 2 \end{cases}$, averiguar si existe alguna recta tal que contenga los puntos A y B y corte a la recta r. Razonar la respuesta.
*(Septiembre 2000)*

16. Hallar el punto simétrico del punto A(2, −3, 5) respecto del plano $\alpha \equiv x - 3y + 4z + 21 = 0$.
*(Septiembre 2000)*

17. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = 2 + 2\mu \\ z = 0 \end{cases}$.

a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s.
b) Halla la ecuación de una recta que sea perpendicular simultáneamente a r y s.

*(Junio 2001)*

18. Determina las coordenadas del punto simétrico del A(−2, 1, 6) respecto de la recta $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$

*(Junio 2001)*

19. Halla el valor de k para que las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y=2 \\ y-z=3 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} y-3z=k \\ y-2z=2 \end{cases}$ se corten. Halla el punto de corte.

*(Septiembre 2001)*

20. Halla $\lambda$ para que el plano $\pi \equiv 2x + \lambda y - z = 1$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}$ sean paralelos. ¿Puedes encontrar otro valor de $\lambda$ para que sean perpendiculares?

*(Septiembre 2001)*

21. Considera el plano $\pi \equiv x - y + 1 = 0$ y el punto A(2, 0, 1).
    a) Determina la ecuación de la recta que es perpendicular al plano $\pi$ y pasa por el punto A.
    b) Halla las coordenadas del punto B que es simétrico del punto A respecto del plano $\pi$.

*(Junio 2002)*

22. Determina la ecuación del plano que pasa por el punto P(1, 0, 2), es paralelo a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = z-3$ y perpendicular al plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0$.

*(Junio 2002)*

23. Sea $\pi$ el plano que pasa por los puntos (1, 0, 0), (0, 1, 1) y (1, 1, 1); A el punto (1, 2, 3) y B el simétrico de A respecto del plano $\pi$.
    a) Halla la ecuación de la recta que pasa por A y por el punto medio del segmento $\overline{AB}$.
    b) Halla la ecuación de la recta paralela a la anterior que pasa por el punto (2, 2, 2).

*(Septiembre 2002)*

24. Considera el plano $\pi \equiv ax + 2y - 4z + b = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1}$
    a) Halla los valores de a y b para que la recta r esté contenida en $\pi$.
    b) ¿Existe algún valor de a y de b para que la recta sea perpendicular al plano $\pi$?

*(Septiembre 2002)*

25. Las rectas de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x=2 \\ y=-5 \end{cases}$ se cruzan en el espacio.
    a) Escribe las ecuaciones paramétricas de ambas rectas.
    b) Halla un punto de r y otro de s tales que el vector con origen en uno y otro extremo sea perpendicular a ambas rectas.

*(Junio 2003)*

26. Considera la recta dada por $r \equiv \begin{cases} x - 4y + 9 = 0 \\ 3y - z - 9 = 0 \end{cases}$

a) Determina el plano que pasa por el punto P(1, 4, 0) y contiene a r.

b) ¿Para cualquier valor de $\lambda$, el plano $x - 4y + 9 + \lambda(3y - z - 9) = 0$ contiene a r?

c) Determina los valores de $\lambda$ para que el plano diste 3 unidades del origen de coordenadas.

*(Junio 2003)*

27. Sea $\pi$ el plano de ecuación $3x - 2y - 6z = 1$ y r la recta dada por $(x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(2, -1, 1)$

a) Define la relación de paralelismo entre una recta y un plano.

b) Averigua si la recta r y el plano $\pi$ son paralelos.

c) Define la relación de perpendicularidad entre una recta y un plano.

d) Averigua si la recta r y el plano $\pi$ son perpendiculares.

*(Septiembre 2003)*

28. Dados los planos $\pi \equiv x + y + z = 1$; $\pi' \equiv x - y = 0$:

a) Calcula el ángulo que forman $\pi$ y $\pi'$.

b) Determina las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por P(1, 2, 3) y es perpendicular al plano $\pi$.

*(Septiembre 2003)*

29. Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x + 2z = 3 \\ y + 4z = 5 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 3x - y + 2z = 1$. Se pide:

a) Comprueba que r y $\pi$ son paralelos.

b) Calcula la distancia entre r y $\pi$.

c) Determina dos rectas distintas que estén contenidas en $\pi$ y sean paralelas a r.

*(Junio 2004)*

30. Considera los puntos A(2, 0, 0), B(0, 2, 0), C(2, 2, 1) y D(1, 1, 2) y calcula:

a) El volumen del tetraedro que determinan.

b) La ecuación cartesiana o implícita del plano que contiene al punto D y es paralelo al que contiene a los puntos A, B, C.

*(Junio 2004)*

31. Halla la distancia del plano $\pi_1 \equiv 4x - 10y + 2z = -1$ al plano $\pi_2 \equiv \begin{cases} x = 2\lambda + 3\mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = \lambda - \mu \end{cases}$

*(Septiembre 2004)*

32. Considera la recta r que pasa por los puntos A(2, 1, 0) y B(−4, −2, 0) y la recta s determinada por el punto C(2, 3, 5) y el vector dirección v(1, 3, 0).

a) Calcula el ángulo formado por r y s.

b) Calcula la distancia de r a s.

*(Septiembre 2004)*

33. a) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$ y al punto P(2, −1, 2).

b) Calcula la distancia desde el plano obtenido al punto Q(0, 1, 0).

*(Junio 2005)*

34. Halla el área y las longitudes de las tres alturas de un triángulo cuyos vértices son: A(1, 1, 1), B(0, 3, 5) y C(4, 0, 2).

*(Junio 2005)*

35. Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi \equiv x + y - z + 6 = 0$ con la recta $s \equiv \frac{x}{3} = y - 2 = z + 1$ y es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$

*(Septiembre 2005)*

36. Dados los puntos A(1, −2, 3) y B(0, 2, 1), se pide:
    a) La ecuación paramétrica de la recta que pasa por ambos puntos.
    b) La ecuación del plano $\pi$ que está a igual distancia de A y B.
    c) La distancia al origen de la recta intersección del plano $2y - z = 0$ con el plano $\pi$ del apartado b)

*(Septiembre 2005)*

37. El plano $\alpha$ de ecuación general $x + y + z = 10$, corta a las rectas $r_1 : x = y = 1$, $r_2 : y = z = 2$ y $r_3 : x = z = 3$, en los puntos A, B y C respectivamente. Se pide:
    a) Halla el volumen del tetraedro cuyos vértices son A, B, C y D(1, 2, 3).
    b) Determina la distancia desde el vértice D hasta la cara opuesta del tetraedro.

*(Junio 2006)*

38. a) Halla un punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 \end{cases}$ equidistante de los puntos P(−1, 2, 1) y Q(0, 3, 1).
    b) Calcula la ecuación implícita de un plano $\pi$ de modo que el simétrico del punto P respecto del plano $\pi$ sea el punto Q.

*(Junio 2006)*

39. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 + t \\ z = 6 + t \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ -2y + z = 2 \end{cases}$, se pide:
    a) Analiza su posición relativa.
    b) Halla la ecuación general del plano $\pi$ que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r.

*(Septiembre 2006)*

40. a) Calcula unas ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P(2, −1, 3) y es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$.

b) Halla las coordenadas del punto P', simétrico del punto P respecto de la recta r.

*(Septiembre 2006)*

41. Consideramos las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = 2 \end{cases}$, $r_2 \equiv \begin{cases} y = 1 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$ y $r_3 \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 3 \end{cases}$. Se pide:

a) Demuestra que las rectas $r_1$ y $r_2$ se cortan en un único punto.

b) Halla las ecuaciones en forma continua de la recta que pasa por el punto de intersección de $r_1$ y $r_2$, y es paralela a $r_3$.

*(Junio 2007)*

42. Dados los planos $\alpha \equiv x + y - z = 1$ y $\beta \equiv \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 1 - t \\ z = 2 + s \end{cases}$, con $t, s \in \mathbb{R}$, se pide:

a) Determina su posición relativa.
b) Calcula la distancia entre ellos.

*(Junio 2007)*

43. Consideramos los planos $\pi_1 \equiv x + 2y - z = 1$, $\pi_2 \equiv 3x - z = 3$ y $\pi_3 \equiv -x + 2y + z = 7$.
a) Determina su posición relativa.
b) Halla el ángulo que forman los plano $\pi_1$ y $\pi_2$.

*(Septiembre 2007)*

44. Dados los puntos de coordenadas A(3, 1, 1), B(0, 2, 2) y C(−1, −1, −1), se pide:
a) Determina la ecuación general del plano que los contiene.
b) Calcula la distancia desde el punto P(0, 0, 4) a dicho plano.

*(Septiembre 2007)*

45. Dados los vectores $\vec{u} = (a, b, 1)$, $\vec{v} = (-3, 4, 1)$ y $\vec{w} = (1, 2, c)$, determina el valor de lo parámetro $a, b, c \in \mathbb{R}$ de manera que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares y además $\vec{u} \times \vec{w} = \vec{v}$, donde $\times$ denota el producto vectorial. ¿Qué ángulo forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en dicho caso?

*(Junio 2008)*

46. Dados los puntos A(1, 1, 1), B(1 + λ, 2, 1 − λ) y C(1 + λ, 1 + λ, 2 + λ), donde $\lambda \in \mathbb{R}$:

a) Prueba que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ forman un ángulo de 90º, independientemente del valor de λ.

b) Determina los valores de λ para que la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo de vértices A, B y C sea igual a 3.

*(Junio 2008)*

47. Dados el plano $\pi \equiv x - y + z + k = 0$, donde $k \in$ ¡ , y la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = y + 1 = -z$, se pide:

    a) Demuestra que para cualquier $k \in$ ¡ , la recta r es paralela al plano $\pi$.

    b) Determina el valor de $k \in$ ¡ de forma que la recta r esté contenida en el plano $\pi$.

*(Septiembre 2008)*

48. Dado el punto P(2, 2, 1) y el plano $\pi$ de ecuaciones $\begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 1 - t + s \\ z = t \end{cases}$, se pide:

    a) Distancia del punto P al plano $\pi$.

    b) Ecuaciones generales de la recta que pasa por el punto P y es perpendicular a $\pi$.

*(Septiembre 2008)*