

Matemáticas II

Ejercicios de Selectividad propuestos en Castilla-La Mancha

Tema I. Análisis

Límites

1. Calcular $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x - 8}{\sec x + 10}$

(Septiembre 1999)

2. Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$

(Septiembre 2000)

3. Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}$

(Junio 2001)

4. Enuncia la regla de L'Hôpital y calcula el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(x - \ln(1+x))}{x \ln(1+x)}$

(Septiembre 2001)

5. Enuncia la regla de L'Hôpital. Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{L(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$

(L = logaritmo neperiano)

(Junio 2003)

6. Enuncia la regla de L'Hôpital. Resuelve el límite siguiente: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$

(Junio 2005)

7. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^2 - x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}}$

(Junio 2008)

Continuidad de la funciones. Derivadas

1. Estudiar en $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$ la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2x}{\pi} + 2 & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 2 + \operatorname{sen} x & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(Junio 1997)

2. Calcular a y b para que f(x) sea continua en $x = 0$ y $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ a + x^3 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{b}{2x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Para los valores de a y b obtenidos, estudiar la derivabilidad en $x = 0$ y $x = 1$.

(Septiembre 1997)

3. Calcular a y b para que f(x) sea continua en $x = 0$ y $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} e^x + a & \text{si } x \leq 0 \\ ax^2 + 2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{b}{2x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Para los valores de a y b obtenidos anteriormente, estudiar la derivabilidad de f(x) en $x = 0$.

(Junio 1998)

4. Determinar a y b para que f(x) sea continua en $x = -1$ y $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 + ax^2 - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{a}{2x} & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ e^{x-1} + 2b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Para los valores de a y b obtenidos anteriormente, estudiar si f(x) es derivable en $x = 1$.

(Septiembre 1998)

5. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{si } x \leq -1 \\ 2 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(Junio 1999)

6. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ a + bx & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, determinar a y b de modo que sea

continua. Para los valores que se obtengan, estudiar la derivabilidad.

(Junio 2000)

7. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x} & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(Junio 2000)

8. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Determina k para que f(x) sea continua en $x = 1$

b) ¿Es la función f(x) para el valor k calculado derivable en $x = 1$?

(Junio 2001)

9. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq -2 \\ ax^2 + bx & \text{si } -2 < x \leq 4, \\ x - 4 & \text{si } 4 < x \end{cases}$, determina a y b de modo que sea

continua. Para los valores que se obtengan, estudia la derivabilidad.

(Septiembre 2001)

10. La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{L(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es derivable en el

punto $x = 0$. Calcula cuánto valen las constantes b y c. (L = logaritmo neperiano).

(Junio 2002)

11. Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

a) Define continuidad de una función en un punto.

b) ¿En qué puntos es continua la función f(x)?

c) ¿En qué puntos es derivable la función f(x)?

d) Si una función no es continua en un punto, ¿puede ser derivable en él?

(Septiembre 2003)

12. Determina b y c para que la función $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + bx + c & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Sea derivable en todos los puntos de \mathbb{R} .

b) Calcula la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa 1.

(Junio 2004)

13. Considera la función siguiente $f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- a) Determina los valores de a y b para que sea derivable en todos los puntos.
b) Esboza la gráfica de la curva representativa de la función para los valores de a y b calculados.

(Septiembre 2004)

14. Estudia si la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ -3 & \text{si } 2 < x \end{cases}$ es continua en los puntos $x = -1$

y $x = 2$. Representa gráficamente dicha función.

(Junio 2005)

15. Determina, si es posible, los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$ para que la función

definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1-e^x}{2x+1-e^{2x}} & \text{si } x < 0 \\ (2x-k)^2 - 6 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, sea continua en $x = 0$.

(Septiembre 2006)

16. a) Define el concepto de función continua en un punto.

b) Si $f(x) = \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{4x}$, indica de forma razonada en qué valor $x = a$ no está definida $f(x)$.

c) Calcula el valor de $b \in \mathbb{R}$ para que la función $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ b & \text{si } x = a \end{cases}$ sea continua.

(Junio 2007)

Propiedades de las funciones derivables. Representación gráfica de funciones

1. Determinar las asíntotas de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Estudiar la concavidad y convexidad. Determinar los puntos de inflexión.

(Junio 1997)

2. Se considera la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$; obtener sus asíntotas. Estudiar el crecimiento y decrecimiento. Calcular los máximos y mínimos relativos.

(Septiembre 1997)

3. Determinar las asíntotas de $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$ y estudiar el crecimiento de la función.

(Junio 1998)

4. Estudiar la concavidad y convexidad de $y = \frac{4}{x^2 + 3}$. Determinar si tiene puntos de inflexión.

(Septiembre 1998)

5. Se desea construir un depósito de latón con forma de cilindro de área total igual a 54 m². Determinar el radio de la base y la altura del cilindro para que el volumen sea máximo.

(Junio 1999)

6. Hallar los máximos y mínimos relativos, los puntos de inflexión y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

(Septiembre 1999)

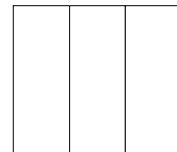
7. El coste de producción de x unidades de un producto dado por la expresión $C = x^2 - 300x + 1000$ ptas. y el precio de venta de una unidad es $U = 1000 - x$ ptas. ¿Cuántas unidades se deben vender para que el beneficio sea máximo?

(Junio 2000)

8. Halla las dimensiones de un depósito abierto superiormente, en forma de prisma recto de base cuadrada, de 1000 metros cúbicos de capacidad que tenga un revestimiento interior de coste mínimo. El precio del m² de revestimiento lateral es 100 euros, el precio del m² de revestimiento del fondo es 200 euros. Halla también el coste mínimo.

(Septiembre 2001)

9. Un solar rectangular de 11.250 m² se divide en tres zonas rectangulares iguales (como muestra la figura) para venderlo. Se valla el borde del campo y la separación de las zonas. Calcula las dimensiones del solar para que la longitud de valla utilizada sea mínima.



(Junio 2002)

10. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3}$. Calcula: a) Los máximos y mínimos relativos. b) Las asíntotas. c) Los puntos de inflexión.

(Junio 2002)

11. La capacidad de concentración de una saltadora de altura en una reunión atlética de tres horas de duración viene dada por la función $f(t) = 300t(3 - t)$ donde t mide el tiempo en horas.

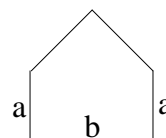
- Calcula los intervalos en los cuales la capacidad de concentración aumenta y los intervalos en los que disminuye. ¿Cuándo es nula?
- ¿Cuál es el mejor momento, en términos de su capacidad de concentración, para que la saltadora pueda batir su propia marca?
- Representa gráficamente la función capacidad de concentración.

(Septiembre 2002)

12. El alcalde de un pueblo quiere preparar un recinto rectangular para celebrar fiestas. Aprovecha para uno de los lados una tapia existente y dispone de 300 m de tela metálica para cercar los otros tres lados.
- Halla las dimensiones del recinto máximo que se puede acotar.
 - Calcula el área de dicho recinto.

(Septiembre 2002)

13. El perímetro de la ventana del dibujo mide 6 metros. Los dos lados superiores forman entre sí un ángulo de 90° . Calcula la longitud de los lados a y b para que el área de la ventana sea máxima.

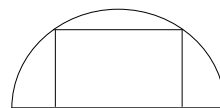


(Junio 2003)

14. Determina las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal (recta perpendicular a la tangente) en el punto de abscisa 0, a la gráfica de la función f dada por $f(x) = 2xe^x + \frac{x^3 - 2}{x^2 + 4}$.

(Junio 2003)

15. En un semicírculo de radio 10 m se quiere inscribir un rectángulo, uno de cuyos lados esté sobre el diámetro y el opuesto a él tenga sus extremos en la parte curva. Calcula las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima.



(Septiembre 2003)

16. Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$:
- Halla las coordenadas del punto de inflexión.
 - Halla las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abscisas.
 - Determina las ecuaciones de las rectas tangentes a $f(x)$ en el punto de inflexión y en el origen de coordenadas.

(Septiembre 2003)

17. Dada la curva $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ se pide:

- Dominio de definición de la función y puntos de corte con los ejes, si los hay.
- Asíntotas, si las hay.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Máximos y mínimos, si los hay.
- Una representación aproximada de la misma.

(Junio 2004)

18. Un alambre de 100 metros de largo se divide en dos trozos. Con uno de los trozos se forma un cuadrado y con el otro una circunferencia. Halla la longitud de los trozos para que la suma de las áreas del cuadrado y del círculo sea mínima.

(Junio 2004)

19. Considera la función $f(x) = -x^4 + 4x^3$. Calcula:

- Puntos de corte con los ejes.
- Máximos y mínimos.
- Puntos de inflexión.
- Halla el área de la región encerrada por la gráfica y el eje X.

(Septiembre 2004)

20. Expresa el número 60 como suma de tres números positivos de forma que el segundo sea doble que el primero. Si el producto de los tres es máximo, determina el valor de dicho producto.

(Septiembre 2004)

21. Una imprenta recibe el encargo de diseñar un cartel con las siguientes características: la zona impresa debe ocupar 100 cm^2 , el margen superior debe medir 3 cm, el inferior 2 cm, y los márgenes laterales 4 cm cada uno. Calcula las dimensiones que debe tener el cartel de modo que se utilice la menor cantidad de papel posible.

(Junio 2005)

22. De todos los prismas rectos de base cuadrada y tales que el perímetro de una cara lateral es de 30 cm, halla las dimensiones del que tiene volumen máximo.

(Septiembre 2005)

23. Estudia el crecimiento y la concavidad de la función $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{Lx}{x}$. (L = logaritmo neperiano)

(Septiembre 2005)

24. Halla los valores de los coeficientes b, c y d para que la gráfica de la función $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ corte al eje OY en el punto $(0, -1)$, pase por el punto $(2, 3)$ y, en ese punto, tenga tangente paralela al eje OX.

(Septiembre 2005)

25. Determina los valores de a, b y $c \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por el origen de coordenadas, tenga un punto de inflexión en $x = -1$ y su recta tangente en $x = 1$ tenga pendiente 3.

(Junio 2006)

26. Enuncia el teorema de Rolle. En los ejemplos siguientes $f(-2) = f(2)$ pero no hay ningún punto $c \in (-2, 2)$ tal que $f'(c) = 0$. Justifica en cada caso por qué no contradicen el teorema de Rolle. a) $f(x) = \frac{1}{x^4}$, b) $g(x) = 2 - |x|$. (Nota: $|x|$ representa el valor absoluto de x)

(Junio 2006)

27. Para la función $f(x) = (x + 2) \cdot e^x$, se pide: a) Estudia su dominio y continuidad. b) Determina sus puntos de corte con los ejes. c) Obtén las coordenadas de los máximos y mínimos. (Recuerda que: $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$)

(Septiembre 2006)

28. Dada la función $f(x) = 9x + 6x^2 - x^4$, se pide: a) Halla los puntos en los que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ tiene pendiente 1. b) Calcula los puntos de inflexión de $f(x)$.

(Junio 2007)

29. En agosto de 1548 el matemático Ludovico Ferrari le propuso a su colega Niccolo Fontana, apodado Tartaglia, el siguiente problema: "Halla dos números reales no negativos cuya suma sea 8 de manera que su producto multiplicado por su diferencia sea máximo". Obtén las soluciones de este problema con dos decimales de aproximación.

(Septiembre 2007)

30. De la función $f(x) = \frac{ax^2 + b}{a - x}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, sabemos que pasa por el punto $(1, 2)$, y que tiene una asíntota oblicua cuya pendiente es -6 . a) Determina los valores a y b de la función. b) Determina, si existen, las asíntotas verticales de dicha función.

(Septiembre 2007)

31. Definición de punto de inflexión de una función. Calcula el valor de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = (x^2 - a)e^x + bx$ tenga un punto de inflexión en $x = 0$ y un mínimo relativo en $x = 1$.

(Junio 2008)

32. Dadas las funciones $f(x) = \ln(1 - x^2)$ y $g(x) = \ln(1 + x^2)$, se pide:

- a) Determina el dominio de cada una de ellas.
b) Estudia si dichas funciones tienen puntos de inflexión.

(Septiembre 2008)

33. Determina los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = (ax^2 + bx)e^{-x}$ tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 3$ y además pase por el punto $(1, -1/e)$. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

(Septiembre 2008)

Integrales indefinidas

1. Calcular $\int \frac{2x^2 - 4x + 1}{x(x^2 - 2x + 1)} dx$

(Junio 1997)

2. Calcular $\int \cos \sqrt{3x} dx$

(Septiembre 1997)

3. Calcular $I = \int (2x + 4) \cdot e^{-5x} dx$

(Junio 1998)

4. Calcular la integral $I = \int \frac{x^2 + 4}{x^2 - 5x + 4} dx$

(Septiembre 1998)

5. Calcular $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 13} dx$

(Junio 1999)

6. Calcular $\int x^3 e^{-4x^2} dx$

(Septiembre 1999)

7. Calcular $\int \frac{x + 1}{x^3 + x^2 - 6x} dx$

(Junio 2000)

8. Calcular $\int \frac{3x}{x^2 + 2x + 3} dx$

(Septiembre 2000)

9. Resuelve $\int \frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)} dx$

(Junio 2001)

10. Calcula $\int \frac{x + 2}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx$

(Septiembre 2001)

11. Calcula $\int \frac{x^2 - 2}{x^3 - 3x + 2} dx$

(Septiembre 2002)

12. Calcula la siguiente integral: $\int \frac{Lx}{x} dx$ (L = logaritmo neperiano)

(Septiembre 2003)

13. Determina $f(x)$ sabiendo que $f'''(x) = 24x$; $f''(0) = 2$, $f'(0) = 1$ y $f(0) = 0$.

(Junio 2005)

14. Calcula la primitiva de $\int \frac{x + \sqrt{x}}{x^2} dx$.

(Septiembre 2005)

15. Calcula la integral indefinida $\int \frac{x+2}{x^3-2x+1} dx$

(Junio 2006)

16. Calcula la siguiente integral: $\int \frac{x^3+1}{x^2+4} dx$

(Septiembre 2006)

17. Calcula la siguiente integral: $\int \frac{2}{1+\sqrt{x}} dx$

(Indicación: Puede ayudarte realizar un cambio de variable adecuado.)

(Junio 2007)

18. Calcula la siguiente integral: $\int \frac{x}{(x+1)^3} dx$

(Septiembre 2007)

19. Calcula la integral $\int \frac{2x^3-9x^2+9x+6}{x^2-5x+6} dx$

(Junio 2008)

Integrales definidas. Aplicaciones

1. Dibujar el recinto limitado por $y = x^2$; $y = \frac{1}{x}$; $y = \frac{x}{4}$. Calcular su área.

(Junio 1997)

2. Dibujar el recinto limitado por $y = x^2 - 4x$; $y = 2x - 5$. Calcular su área.

(Septiembre 1997)

3. Dibujar el recinto limitado por las gráficas de $y^2 = 2x$, $2x - y - 2 = 0$. Calcular su área.

(Junio 1998)

4. Hallar la ecuación de la recta tangente a $y = x^2 + 2$, en el punto de abscisa $x = 1$. Calcular el área del recinto limitado por $y = x + 2$, la tangente anterior y el eje OX.

(Septiembre 1998)

5. Calcular el área de la región del plano limitada por las gráficas de las funciones: $y = -x^2 + 4x - 4$ e $y = 2x - 7$.

(Junio 1999)

6. Halla el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $y = x^2 - 2x$ e $y = -x^2 + 4x$.

(Septiembre 1999)

7. Calcular el área del recinto limitado por las curvas $y = x^2 - 1$, $y = 11 - x$ y el eje OX. Dibujar el recinto.

(Junio 2000)

8. Hallar el área del recinto plano delimitado por las curvas de ecuación $y = x^2 - 2$ e $y = -|x|$. Dibujar el recinto.

(Septiembre 2000)

9. Dada la parábola $y = \frac{x^2}{4}$ y la recta $y = x$

- Dibuja las gráficas de la parábola y de la recta.
- Señala el recinto plano comprendido entre las dos gráficas anteriores.
- Calcula el área del recinto plano señalado.

(Junio 2001)

10. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$ en el punto de abscisa $x = 1$. Calcula el área del recinto limitado por la recta tangente y la curva dada.

(Junio 2002)

11. Dadas las funciones $y = -x^2 + 4$ e $y = |x + 2|$:

- Dibuja ambas gráficas.
- Señala el recinto plano comprendido entre las dos gráficas anteriores.
- Calcula el área del recinto plano señalado.

(Septiembre 2002)

12. Dada la curva $y = x^2 - 4x$ y la recta $y = 3x - 6$:

- Dibuja la gráfica de ambas.
- Señala el recinto plano comprendido entre ellas.
- Calcula el área del recinto señalado.

(Junio 2003)

13. La curva $y = 2x^2$ divide al cuadrado de vértices $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$ y $D(0, 1)$ en dos recintos.

- Dibuja dichos recintos.
- Halla el área de cada uno de ellos.

(Junio 2004)

14. Considera la función $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

- Haz un dibujo aproximado de su gráfica.
- Calcula el área encerrada por la gráfica y el eje X.

(Septiembre 2004)

15. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 1 - x$: a) Esboza el recinto encerrado entre sus gráficas. b) Calcula el área de dicho recinto.

(Junio 2006)

16. Dibuja aproximadamente las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 3$ y $g(x) = 2x$, y sombrea el área que queda encerrada entre ellas. Calcula el valor de dicho área.

(Septiembre 2006)

17. Dadas las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = -x + \frac{5}{2}$, se pide: a) Esboza sus gráficas y sombrea el recinto encerrado entre ellas. b) Calcula el área de dicho recinto.

(Junio 2007)

18. Esboza las gráficas de las parábolas $f(x) = 2x^2$ y $g(x) = -x^2 + 3$, sombreado el recinto cerrado que determinan. Calcula el área de dicho recinto.

(Septiembre 2007)

19. Calcula la integral definida $\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$

(Junio 2008)

20. De la función $f(x) = (x + a)\sin x$, donde a es un número real, se sabe que la integral definida $\int_0^{\pi} f(x) \, dx$ es tres veces el valor de la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 0$. Calcula el valor de a .

(Septiembre 2008)

21. Definición de primitiva de una función. Sabiendo que $F(x) = e^{x^2}$ es una primitiva de la función $f(x)$:

- Comprueba que $f(x)$ es una función creciente en \mathbb{R} .
- Calcula el área determinada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas, y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

(Septiembre 2008)