

Matemáticas II

Ejercicios de Selectividad propuestos en Castilla-La Mancha

Tema II. Álgebra

Matrices

1. Calcular la matriz X, tal que $XB + A = C$; siendo

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

(Junio 1997)

2. Encontrar la matriz X, Sabiendo que $B(A - I) = AXA$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Septiembre 1997)

3. Resolver la ecuación matricial $A^2 \cdot X - B = A^2$ y determinar la matriz X, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Junio 1998)

4. Estudiar el rango de A, según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & -a & a \\ 1 & a+1 & 0 & 2a \\ a & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Razonar si para algún valor de a existe A^{-1} .

(Junio 1998)

5. Determinar la matriz X, sabiendo que $X \cdot A^2 + B \cdot A = A^2$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Septiembre 1998)

6. Estudiar el rango de A, según los valores del parámetro $t \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 1 & t+1 & t & t+1 \end{pmatrix}$$

Razonar si para algún valor de t, existe A^{-1} .

(Septiembre 1998)

7. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}$, hallar los valores de x para los cuales la matriz no es inversible. Hallar la inversa de A para $x = 2$.

(Junio 1999)

8. Determinar la matriz X que verifica $AXA - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(Septiembre 1999)

9. Resolver el sistema de ecuaciones matriciales $3X - 2Y = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 16 & 4 \end{pmatrix}$ y $X + 3Y = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 27 \end{pmatrix}$

(Junio 2000)

10. Hallar una matriz X que verifique la condición $A + BX = C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(Septiembre 2000)

11. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- a) Halla paso a paso la inversa de la matriz A
b) Calcula la matriz X que verifique la ecuación $AX = B$

(Junio 2001)

12. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1º - Halla la inversa de $A - BC$. 2º - Resuelve la ecuación matricial $AX - BCX = A$

(Septiembre 2001)

13. Resuelve la ecuación matricial $XA - 2B + 3C = D$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

(Septiembre 2002)

14. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donde λ es un número

real. Encuentra los valores de λ para los que la matriz $A \cdot B$ es invertible.

(Junio 2003)

15. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que se verifica $A^3 + I = O$, siendo I la matriz identidad y O la matriz nula.

b) Justifica que A tiene inversa.

(Septiembre 2003)

16. a) Determina la matriz X para que tenga solución la ecuación $C(A + X)B = I$ donde A , B y C son matrices con inversa de orden n e I es la matriz identidad de orden n .

b) Aplica el resultado anterior para $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(Junio 2004)

17. Sean A y B las matrices siguientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ambas son de

rango 3. ¿Qué ocurre si las combinamos linealmente? En concreto, estudia el rango de la matriz $A + \lambda B$ según los valores del parámetro λ .

(Septiembre 2004)

18. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halla la matriz inversa de $(A - I)$, siendo I la matriz unidad de orden 3.

b) Halla la matriz X solución de la ecuación $X \cdot A - 2B = X$.

(Septiembre 2004)

19. Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donde m es un número real. Encuentra los valores de m para los que $A \cdot B$ tiene inversa.

(Septiembre 2005)

20. a) Despeja la matriz X en función de A e I_2 en la ecuación $(X+A)^2 = X^2 + X \cdot A + I_2$, siendo X y A matrices cuadradas de orden dos, e I_2 la matriz identidad de orden dos.

b) Resuelve la ecuación $B \cdot X + B^2 = I_2$, si $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e I_2 la matriz identidad de orden dos.

(Junio 2006)

21. Calcula el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$.

¿Para qué valores del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ tiene inversa la matriz A ? (No se pide hallarla.)

(Junio 2007)

22. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X + X = B$, donde X es una matriz de orden 2×2 .

b) Resuelve el sistema $\begin{cases} 2X + 2Y = A \\ 4X + 3Y = B \end{cases}$, siendo X e Y dos matrices de orden 2×2 .

(Septiembre 2007)

23. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Encuentra la expresión general de la potencia n -ésima de A . En otras palabras, calcula la expresión de A^n donde n es un número natural cualquiera.

b) Razona que la matriz A^n tiene inversa para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, y calcula dicha matriz inversa.

(Junio 2008)

Determinantes

1. Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ \frac{x}{3} & \frac{y}{3} & \frac{z}{3} \end{vmatrix}$

(Junio 2002)

2. Utiliza las propiedades de los determinantes para desarrollar el siguiente:

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix}$$

Enuncia las propiedades que has utilizado.

(Junio 2003)

3. Si la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ tiene su determinante igual a n , averigua, utilizando las propiedades de los determinantes, el valor del determinante de las matrices siguientes:

$$B = \begin{pmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{pmatrix}$$

(Junio 2005)

4. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = x$, y que $\begin{vmatrix} 3b & 6c & 6a \\ e & 2f & 2d \\ 5h & 10i & 10g \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a+2b & b-c & 7c \\ d+2e & e-f & 7f \\ g+2h & h-i & 7i \end{vmatrix} = 50x + 6$,

halla el valor de x . (Nota: expresa los determinantes de la segunda igualdad en función de x).

(Septiembre 2006)

5. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 7 & 1 \end{vmatrix} = 6$, calcula el valor de $\begin{vmatrix} z/2 & z+7 & 3 \\ y/2 & y & 3 \\ x/2 & x-3 & 3 \end{vmatrix} y \begin{vmatrix} x & -3 & 1 & 2 \\ y & 0 & 1 & 2 \\ z & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

(Septiembre 2008)

Sistemas de ecuaciones lineales

1. Estudiar el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} ax + y + z = 2a \\ x - y + z = a - 1 \\ x + (a - 1)y + az = a + 3 \end{array} \right\}$$

Resolverlos (si es posible) para $a = -1$.

(Junio 1997)

2. Estudiar el sistema según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} x + ay + z = 3a \\ x - y + z = 2 \\ ax + y = 4a \end{array} \right\}$$

Resolverlo (si es posible) para $a = 2$.

(Septiembre 1997)

3. Dados los planos $\alpha: x + y + z = 1$, $\beta: ax + y = 1$ y $\gamma: x + (a + 1)z = 0$, determinar los valores de a para los cuales:

1) los planos se cortan en un solo punto; 2) se cortan en una recta de puntos

(Junio 1999)

4. Discutir y resolver, según los diferentes valores del parámetro a , el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + (a + 1)z = 1 \\ ax = 2 \\ ay + 2z = 0 \end{array} \right.$$

(Septiembre 1999)

5. Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones lineales según los

diferentes valores del parámetro a , y resolverlo cuando sea posible:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y = 5 \\ y + z = a \\ x - 2z = 3 \\ 2x - 3z = a \end{array} \right.$$

(Junio 2000)

6. Estudiar la posición relativa de los planos $\alpha \equiv x + y = 1$, $\beta \equiv ax + z = 0$ y $\gamma \equiv x + y + z = 2$, según los diferentes valores del parámetro a .

(Septiembre 2000)

7. Discute y resuelve (en los casos que sea posible) el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + 3y - z = 0 \end{array} \right.$$

(Junio 2001)

8. Clasifica el sistema según los valores de m y resuelve cuando $m = -1$,
- $$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 5y + 4z = -1 \\ x + 3y + m^2z = 3m \end{cases}$$

(Septiembre 2001)

9. Discute según los valores del parámetro a el sistema
- $$\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

¿Para qué valores de a se puede aplicar la regla de Cramer para resolver el sistema?

(Junio 2002)

10. Hallar el valor del parámetro k para que el sistema
- $$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ 4x + 5y + 3z = k \end{cases}$$
- sea compatible indeterminado. Calcula la solución general y verifica si las ternas
- $(1, 1, 0)$
- ,
- $(-5, 4, 3)$
- y
- $(1, 2, -1)$
- son soluciones particulares.

(Septiembre 2002)

11. Estudia, según los valores de a , la compatibilidad del sistema:
- $$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = -2 \end{cases}$$

Resuélvelo para el valor de a que lo haga compatible indeterminado.

(Septiembre 2003)

12. Se considera el sistema de ecuaciones:
- $$\begin{cases} (m+2)x + (m-1)y - z = 3 \\ mx - y + z = 2 \\ x + my - z = 0 \end{cases}$$

a) Discútelo para los distintos valores de m .

b) Resuélvelo para $m = 1$.

(Junio 2004)

13. Dado el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro a :
- $$\begin{cases} x + 2y + z = a \\ x + y - az = a \\ 2x + 3y + z = a \end{cases}$$
- , se

pide:

a) Discusión del mismo en función del valor del parámetro a .

b) Resolución en el caso de que $a \neq 0$.

(Junio 2005)

14. a) Discute, en función de los valores de m , el siguiente sistema:
- $$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + 2y + mz = m \end{cases}$$

b) Resuelve, en los casos de compatibilidad, el sistema anterior.

(Septiembre 2003)

15. A un compañero le piden que clasifique y resuelva el sistema
$$\begin{cases} 3x - ky = 3 \\ y + 3z = 6 \\ x + kz = 5 \end{cases}$$
 para el

valor del parámetro $k \in \mathbb{R}$ que él desee. Obtiene, correctamente para dicho valor, que el sistema es compatible indeterminado, y que una expresión de las soluciones en forma paramétrica es $x = 1 + 2t$, $y = \dots$, $z = \dots$. Determina para qué valor del parámetro k ha clasificado y resuelto el sistema, y calcula las expresiones de las incógnitas "y" y "z" que le faltan.

(Junio 2006)

16. Clasifica en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax - 3y - 2z = 0 \\ -x + (5 + a)z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$$
 y resuélvelo, si es posible, para $a = -4$.

(Septiembre 2006)

17. Discute y resuelve, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, el sistema
$$\begin{cases} ax + y = 0 \\ -y + 2az = 0 \\ -x + ay = 0 \end{cases}$$

(Junio 2007)

18. Enuncia el Teorema de Rouché-Fröbenius. Contesta razonadamente a las siguientes preguntas para un sistema $A \cdot X = B$ en forma matricial:

- ¿Puede un sistema homogéneo ser incompatible?
- Si la matriz A es de orden 2×3 , ¿puede ser el sistema $A \cdot X = B$ compatible determinado?

(Septiembre 2007)

19. Encuentra, si es posible, un valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ de modo que el sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ 2x + z = a \end{cases}$$

- Sea compatible determinado.
- Sea compatible indeterminado.
- Sea incompatible.

(Junio 2008)

20. Clasifica el sistema
$$\begin{cases} x - 2y + az = 0 \\ -ay + 2z = 0 \\ 2x - y + (a + 1)z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$
 en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, y

resuélvelo para $a = -2$

(Septiembre 2008)