Prueba de Acceso a Estudios Universitarios – Matemáticas II

PRIMER BLOQUE

A. Encuentra el punto de la recta $x+y=4$, que cumpla que la suma de los cuadrados de sus coordenadas sea mínima.

Solución:

Hemos de minimizar la expresión x^2+y^2 con la condición x + y = 4, de donde y = x − 4. Sustituyendo en la expresión inicial la función a minimizar queda de la forma $f(x)=x^2+(x-4)^2$.

Derivemos f e igualemos a cero:

$f'(x)=2x+2(x-4)=2x+2x-8=4x-8$. $f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x-8=0 \Leftrightarrow x=2$.

Hagamos la segunda derivada y comprobemos que el punto x = 2 es un mínimo:

$f''(x)=4 \Rightarrow f''(2)=4>0 \Rightarrow$ x = 2 es un mínimo.

Sustituyendo el valor de x en x + y = 4 se obtiene y = 2.

Por tanto el punto de la recta x + y = 4 que cumple que la suma de los cuadrados de sus coordenadas es mínima es (2, 2).†

B. Enuncia el Teorema de Bolzano. Como aplicación de este teorema, demuestra que las gráficas de las funciones $f(x)=e^{x^2}$ y $g(x)=2\cos\left(x^2\right)$ se cortan en, al menos, un punto.

Solución:

Teorema de Bolzano:

Si f es continua en un intervalo [a, b] contenido en ¡ y el signo de f(a) es distinto del signo de f(b), entonces existe un número k ∈ (a, b) tal que f(k) = 0.

Tomemos la función diferencia $h(x)=f(x)-g(x)=e^{x^2}-2\cos\left(x^2\right)$, que es continua en todo ¡ pues tanto f como g lo son (la función exponencial y la función coseno son continuas en toda la recta real). Apliquémosle a h el Teorema de Bolzano.

Para a = 0 tenemos $h(0)=e^0-2\cos 0=1-2=-1<0$

Hemos de conseguir un valor de b para el que h(b) > 0. Para eso deberíamos de buscar un valor que haga que $\cos\left(x^2\right)$ sea negativo y de esta manera $e^{x^2}-2\cos\left(x^2\right)$ será positivo. Sabemos que $\cos\pi=-1$. Por tanto busquemos un valor de x tal que $x^2=\pi \Rightarrow$ $\Rightarrow x=\sqrt{\pi}$. Este será nuestro valor de b.

Por tanto para $b=\sqrt{\pi}$ se tiene:

$$h\left(\sqrt{\pi}\right)=e^{\sqrt{\pi}}-2\cos\left(\sqrt{\pi}^2\right)=e^{\sqrt{\pi}}-2\cos\pi=e^{\sqrt{\pi}}-2(-1)=e^{\sqrt{\pi}}+2>0$$

Aplicando el Teorema de Bolzano existe $k\in\left[0,\sqrt{\pi}\right]$ tal que h(k) = 0 ⇒ f(k) − g(k) = 0 ⇒ f(k) = g(k), lo que quiere decir que f y g se cortan en el punto k pues para éste tienen la misma imagen.†

SEGUNDO BLOQUE

A. Encuentra una primitiva de la función $f(x)=\dfrac{x+36}{4+9x^2}$.

Solución:

$$\int\frac{x+36}{4+9x^2}dx=\int\left(\frac{x}{4+9x^2}+\frac{36}{4+9x^2}\right)dx=\int\frac{x}{4+9x^2}dx+\int\frac{36}{4+9x^2}dx$$

Por un lado: $\displaystyle\int\frac{x}{4+9x^2}dx=\frac{1}{18}\int\frac{18x}{4+9x^2}dx=\frac{1}{18}\ln\left(4+9x^2\right)+C$

Por otro lado: $\displaystyle\int\frac{36}{4+9x^2}dx=\int\frac{\frac{36}{4}}{\frac{4+9x^2}{4}}dx=\int\frac{9}{1+\frac{9x^2}{4}}dx=\int\frac{9}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}dx=$

$$=\frac{2}{3}9\int\frac{\frac{3}{2}}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}dx=6\operatorname{arctg}\left(\frac{3x}{2}\right)+C$$

Por tanto:

$$\int\frac{x+36}{4+9x^2}dx=\int\frac{x}{4+9x^2}dx+\int\frac{36}{4+9x^2}dx=\frac{1}{18}\ln\left(4+9x^2\right)+6\operatorname{arctg}\left(\frac{3x}{2}\right)+C\dagger$$

B. Calcula la integral definida $\displaystyle\int_1^4\frac{\sqrt{x}+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ (puede ayudarte hacer un cambio de variable).

Solución:

Hallemos en primer lugar una primitiva de la función $\dfrac{\sqrt{x}+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$:

$$\int\frac{\sqrt{x}+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(1+\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right)dx=\int 1dx+\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$$

Calculemos la integral $\displaystyle\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$. Para ello hacemos el siguiente cambio de variable $\left[\sqrt{x}=t\Rightarrow\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt\right]$. Así $\displaystyle\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int e^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\int e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=2\int e^t dt=$

$$=2e^t+C=2e^{\sqrt{x}}+C$$

Entonces $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int 1dx+\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=x+2e^{\sqrt{x}}+C$

Por tanto, aplicando la regla de Barrow:

$$\int_1^4\frac{\sqrt{x}+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\left.x+2e^{\sqrt{x}}\right]_1^4=\left(4+2e^2\right)-\left(1+2e\right)=2e^2-2e+3\dagger$$

TERCER BLOQUE

A. a) Sean A, B y X matrices cuadradas de tamaño n. Despeja X de la ecuación $A\cdot X\cdot B=B^2$.

b) Calcula la matriz X siendo $A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&3\\1&0&1\end{pmatrix}$.

Solución:

a) Llamemos A^{-1} y B^{-1} a las matrices inversas de A y B respectivamente. Se tiene que $A\,A^{-1}=A^{-1}\,A=I$; $B\,B^{-1}=B^{-1}\,B=I$, donde I es la matriz identidad.

Entonces $A\cdot X\cdot B=B^2 \Leftrightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot B\cdot B^{-1}=A^{-1}\cdot B^2\cdot B^{-1} \Leftrightarrow I\cdot X\cdot I=A^{-1}\cdot B^2\cdot B^{-1}$ $\Leftrightarrow X=A^{-1}\cdot B^2\cdot B^{-1}$

b) Hallemos la inversa de A. $|A|=\begin{vmatrix}0&0&-1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{vmatrix}=(0+0+0)-(-1+0+0)=1$. Entonces

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(A^d\right)^t=\left(A^d\right)^t$, donde $\left(A^d\right)^t$ es la traspuesta de la matriz adjunta A^d.

$A^d=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$; $A^{-1}=\left(A^d\right)^t=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$

Hallemos la inversa de B. $|B|=\begin{vmatrix}1&0&2\\0&1&3\\1&0&1\end{vmatrix}=(1+0+0)-(2+0+0)=-1$. Entonces

$B^{-1}=\frac{1}{|B|}\left(B^d\right)^t=\frac{1}{-1}\left(B^d\right)^t=-\left(B^d\right)^t$, donde $\left(A^d\right)^t$ es la traspuesta de la matriz adjunta B^d.

$B^d=\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&-1&0\\-2&-3&1\end{pmatrix}$; $B^{-1}=-\left(B^d\right)^t=-\begin{pmatrix}1&0&-2\\3&-1&-3\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&2\\-3&1&3\\1&0&-1\end{pmatrix}$

Por tanto $X=A^{-1}\cdot B^2\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&4\\3&1&6\\2&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&2\\-3&1&3\\1&0&-1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}2&1&5\\0&1&2\\-3&0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&2\\-3&1&3\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&1&1\\-1&0&-2\end{pmatrix}$ †

B. a) Calcula, en función del parámetro $a \in$ ¡ , las soluciones de la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & x-1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 1 \\ x & 0 & a & x \end{vmatrix} = 0$$

b) ¿Para qué valor de a la ecuación anterior tiene una única solución?

Solución:

a) $\begin{vmatrix} x & x-1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0-2x+2+0)-(-1+0+4x) = -6x+3$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 1 \\ x & 0 & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & x & 1 \\ -2 & 0 & -x & -1 \\ 1 & 0 & x & 1 \\ x & 0 & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -x & -1 \\ 1 & x & 1 \\ x & a & x \end{vmatrix}$, donde se le ha restado la segunda fila a la primera y luego se ha desarrollado por los elementos de la segunda columna.

$\begin{vmatrix} -2 & -x & -1 \\ 1 & x & 1 \\ x & a & x \end{vmatrix} = (-2x^2-x^2-a)-(-x^2-x^2-2a) = -x^2+a$

Entonces $\begin{vmatrix} x & x-1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 1 \\ x & 0 & a & x \end{vmatrix} = -6x+3-\left(-x^2+a\right) = x^2-6x-a+3$

Por tanto $\begin{vmatrix} x & x-1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 1 \\ x & 0 & a & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^2-6x-a+3=0$, ecuación de segundo grado cuyo discriminante es $\Delta = (-6)^2-4\cdot 1\cdot(-a+3) = 36+4a-12 = 4a+24$.

Luego $x = \dfrac{6\pm\sqrt{4a+24}}{2} = \dfrac{6\pm\sqrt{4(a+6)}}{2} = \dfrac{6\pm 2\sqrt{a+6}}{2} = 3\pm\sqrt{a+6}$

b) La ecuación anterior tiene solución única si el discriminante es igual a cero, es decir, si $4a + 24 = 0 \Leftrightarrow a = -6$. En este caso la única solución es $x = 3$. †

CUARTO BLOQUE

A. a) Estudia, en función del parámetro $k \in$ ¡ , la posición relativa de los planos $\pi_1 \equiv x+y-z=1$ y $\pi_2 \equiv x+y-k^2z=k$.

b) ¿Existe algún valor de k para el que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares?

Solución:

a) Consideremos los dos planos en forma de sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas: $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+y-k^2z=k \end{cases}$.

Estudiemos el rango de la matriz de los coeficientes: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -k^2 \end{pmatrix}$. Los menores complementarios son $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -k^2 \end{vmatrix}=-k^2-(-1)=1-k^2$. Igualando el segundo a cero obtenemos $1-k^2=0 \Leftrightarrow k^2=1 \Leftrightarrow k=\pm 1$. Por tanto:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -k^2 \end{pmatrix}=\begin{cases} 2 \ \text{ si } \ k \neq \pm 1 \\ 1 \ \text{ si } \ k=\pm 1 \end{cases}$$

Estudiemos ahora el rango de la matriz ampliada: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -k^2 & k \end{pmatrix}$. Distinguiremos tres casos:

- Si $k \neq \pm 1 \Rightarrow \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -k^2 & k \end{pmatrix}=2$ pues, como se ha visto anteriormente, habrá un menor de orden dos distinto de cero.
- Si $k=-1 \Rightarrow \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}=2$ pues hay un menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1-1=-2$.
- Si $k=1 \Rightarrow \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=1$ pues todos los menores de orden dos son iguales a cero.

Resumiendo:

- Si $k \neq \pm 1 \Rightarrow \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -k^2 \end{pmatrix}=\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -k^2 & k \end{pmatrix}=2$. El sistema es compatible indeterminado con un grado de libertad: los dos planos se cortan en una recta (planos secantes).
- Si $k=-1 \Rightarrow \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -k^2 \end{pmatrix}=1$; $\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -k^2 & k \end{pmatrix}=2$. El sistema es incompatible: los planos no tienen ningún punto en común, son paralelos.

- Si $k=1 \Rightarrow$ rango$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -k^2\end{pmatrix}$=rango$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -k^2 & k\end{pmatrix}=1$. El sistema es compatible indeterminado con dos grados de libertad: los dos planos coinciden.

b) Para que los dos planos sean perpendiculares han de ser también perpendiculares los vectores perpendiculares a los dos planos:

- Vector perpendicular a π_1: $\vec{u}=(1, 1, -1)$
- Vector perpendicular a π_2: $\vec{v}=(1, 1, -k^2)$

Entonces $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow 1+1+k^2=0\Leftrightarrow k^2+2=0$, ecuación que no tiene soluciones reales.

Por tanto no existe ningún valor de k para el que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares. †

B. a) Halla la ecuación general de un plano π que contenga a la recta $r\equiv\begin{cases}x+z=1\\ y+z=0\end{cases}$ y pase por el origen de coordenadas.

b) Halla las ecuaciones paramétricas de una recta r' contenida en dicho plano, que sea perpendicular a r y que pase por el punto P(1, 0, 0)

Solución:

a) Llamando $z=\lambda$, se tiene que $x=1-\lambda$, $y=-\lambda$. Por tanto la recta tiene ecuaciones paramétricas $\begin{cases}x=1-\lambda\\ y=-\lambda\\ z=\lambda\end{cases}$. Si $\lambda=0$ tenemos el punto de la recta A(1, 0, 0) y si $\lambda=1$ tenemos otro punto de la recta: B(0, −1, 1). Como el plano π que buscamos pasa por el origen de coordenadas O(0, 0, 0), tenemos que dos vectores directores del plano son $\overrightarrow{OA}=(1, 0, 0)$ y $\overrightarrow{OB}=(0, -1, 1)$, con lo que la ecuación general del plano vendrá dada por: $\begin{vmatrix}x-0 & y-0 & z-0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & y & z\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow -z-y=0\Leftrightarrow y+z=0$.

Por tanto $\pi\equiv y+z=0$.

Otra forma de hacer este apartado:

El haz de planos de base la recta r es $\lambda(x+z-1)+\mu(y+z)=0$. Como el plano que buscamos pasa por el origen, entonces $\lambda(0+0-1)+\mu(0+0)=0\Leftrightarrow-\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=0$ y μ puede ser cualquier número real. Sustituyendo en la ecuación del haz:

$0(x+z-1)+\mu(y+z)=0\Leftrightarrow\mu(y+z)=0\Leftrightarrow y+z=0$, con lo que el plano que se pide es $\pi\equiv y+z=0$.

b) Un vector perpendicular al plano es $\vec{u} = (0, 1, 1)$. Como la recta r tiene ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$, un vector director suyo será $\vec{v} = (-1, -1, 1)$ Por tanto un vector director de la recta r' será el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que es perpendicular a ambos. Llamémosle $\vec{w}$. Entonces $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$
$= (i - j) - (-k - i) = 2i - j + k \Rightarrow \vec{w} = (2, -1, 1)$. Como la recta r' pasa por el punto P(1, 0, 0) sus ecuaciones paramétricas son $r' \equiv \begin{cases} x = 1 + 0 \cdot \lambda \\ y = 0 - 1 \cdot \lambda \\ z = 0 + 1 \cdot \lambda \end{cases} \Rightarrow r' \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

Obsérvese que $r' \subset \pi$, pues todo punto de r' verifica la ecuación del plano: $x + z = -\lambda + \lambda = 0$. Además $r' \perp r$ pues $\vec{w} \perp \vec{v}$ ya que $\vec{w} \cdot \vec{v} = (2, -1, 1) \cdot (-1, -1, 1) =$
$= 2 \cdot (-1) + (-1)(-1) + 1 \cdot 1 = -2 + 1 + 1 = 0$. †