Integrales indefinidas

1. Calcular $\int \frac{2x^2-4x+1}{x(x^2-2x+1)}dx$

(Junio 1997)

Solución:

$$\frac{2x^2-4x+1}{x(x^2-2x+1)}=\frac{2x^2-4x+1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2}=$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+A}{x(x-1)^2}\Rightarrow\begin{cases}A+B=2\\-2A-B+C=-4\\A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=1\\C=-1\end{cases}$$

Por tanto:

$$\int\frac{2x^2-4x+1}{x(x^2-2x+1)}dx=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{-1}{(x-1)^2}dx=\ln|x|+\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}+C\,.$$ †

2. Calcular $\int\cos\sqrt{3x}\,dx$

(Septiembre 1997)

Solución:

Llamemos $\sqrt{3x}=t\Rightarrow\frac{3}{2\sqrt{3x}}dx=dt\Rightarrow\frac{3}{2t}dx=dt\Rightarrow dx=\frac{2t}{3}dt$. Entonces, primero por sustitución y la que resulta por partes, tenemos:

$$\int\cos\sqrt{3x}\,dx=\frac{2}{3}\int t\cos t\,dt=\begin{bmatrix}u=t & dv=\cos t\,dt\\ du=dt & v=\operatorname{sen}t\end{bmatrix}=\frac{2}{3}\left(t\operatorname{sen}t-\int\operatorname{sen}t\,dt\right)=$$

$$=\frac{2}{3}(t\operatorname{sen}t-(-\cos t))+C=\frac{2}{3}(t\operatorname{sen}t+\cos t)+C=\frac{2}{3}\left(\sqrt{3x}\operatorname{sen}\sqrt{3x}+\cos\sqrt{3x}\right)+C\,.$$ †

3. Calcular $I=\int(2x+4)\cdot e^{-5x}\,dx$

(Junio 1998)

Solución:

La integraremos por partes:

$$\int(2x+4)\cdot e^{-5x}\,dx=\begin{bmatrix}u=2x+4 & dv=e^{-5x}dx\\ du=2dx & v=\frac{-1}{5}e^{-5x}\end{bmatrix}=(2x+4)\frac{-1}{5}e^{-5x}-\int\frac{-2}{5}\cdot e^{-5x}\,dx=$$

$$=-\frac{(2x+4)}{5}e^{-5x}+\frac{2}{5}\int\cdot e^{-5x}\,dx=-\frac{(2x+4)}{5}e^{-5x}+\frac{2}{5}\frac{-1}{5}e^{-5x}+C=$$

$$=\frac{-1}{5}e^{-5x}\left(2x+\frac{22}{5}\right)+C\,.$$ †

4. Calcular la integral $I = \int \frac{x^2+4}{x^2-5x+4}dx$

(Septiembre 1998)

Solución:

Como el numerador y denominador tienen el mismo grado efectuamos la división. Se obtiene: $x^2+4=\left(x^2-5x+4\right)\cdot 1+5x$. Dividiendo los dos miembros entre x^2-5x+4: $\frac{x^2+4}{x^2-5x+4}=1+\frac{5x}{x^2-5x+4}$.

Pero $\frac{5x}{x^2-5x+4}=\frac{5x}{(x-1)(x-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-4}=\frac{A(x-4)+B(x-1)}{(x-1)(x-4)}=$

$=\frac{(A+B)x+(-4A-B)}{(x-1)(x-4)}\Rightarrow\begin{cases}A+B=5\\-4A-B=0\end{cases}\Rightarrow A=\frac{-5}{3};\ B=\frac{20}{3}$.

Entonces $\frac{x^2+4}{x^2-5x+4}=1+\frac{5x}{x^2-5x+4}=1-\frac{5}{3(x-1)}+\frac{20}{3(x-4)}$.

Por tanto: $\int\frac{x^2+4}{x^2-5x+4}dx=\int dx-\frac{5}{3}\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{20}{3}\int\frac{1}{x-4}dx=$

$=x-\frac{5}{3}\ln|x-1|+\frac{20}{3}\ln|x-4|+C$. †

5. Calcular $\int\frac{x^2+1}{x^2-4x+13}dx$

(Junio 1999)

Solución:

Al igual que en el ejercicio anterior, efectuando la división se tiene:

$$x^2+1=\left(x^2-4x+13\right)\cdot 1+4x\Rightarrow\frac{x^2+1}{x^2-4x+13}=1+\frac{4x}{x^2-4x+13}$$

El polinomio $x^2-4x+13$ no tiene raíces reales. Descompongamos el numerador buscando una expresión que sea la derivada del denominador, es decir, $2x-4$:

$$4x=\frac{4}{2}(2x-4+4)=2(2x-4)+8.$$

Entonces: $\frac{4x}{x^2-4x+13}=\frac{2(2x-4)}{x^2-4x+13}+\frac{8}{x^2-4x+13}$. Por tanto:

$$\int\frac{x^2+1}{x^2-4x+13}dx=\int\left(1+\frac{4x}{x^2-4x+13}\right)dx=\int\left(1+\frac{2(2x-4)}{x^2-4x+13}+\frac{8}{x^2-4x+13}\right)dx=$$

$$=\int dx+2\int\frac{2x-4}{x^2-4x+13}dx+\int\frac{8}{x^2-4x+13}dx=\textbf{(*)}$$

La última integral se calcula modificando adecuadamente la expresión $x^2-4x+13$ en otra del tipo $(x-m)^2+n^2$. En este caso $x^2-4x+13=(x-2)^2+3^2$. Por tanto

$$\textbf{(*)}=\int dx+2\int\frac{2x-4}{x^2-4x+13}dx+\int\frac{8}{(x-2)^2+3^2}dx=$$

$$=\int dx+2\int\frac{2x-4}{x^2-4x+13}dx+\int\frac{\frac{8}{9}}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1}dx=$$

$$=\int dx+2\int\frac{2x-4}{x^2-4x+13}dx+\frac{8}{3}\int\frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1}dx=$$

$$=x+2\ln\left|x^2-4x+13\right|+\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{3}\right)+C\,.\ \dagger$$

6. Calcular $\int x^3e^{-4x^2}dx$

(Septiembre 1999)

Solución:

Procederemos por partes. Como la derivada de la función $y=e^{-4x^2}$ es $y'=-8xe^{-4x^2}$, tomaremos como función $u=x^2$, para que $dv=xe^{-4x^2}dx$ sea fácil de integrar:

$$\int x^3e^{-4x^2}dx=\begin{bmatrix} u=x^2 & dv=xe^{-4x^2}dx \\ du=2xdx & v=\frac{-1}{8}e^{-4x^2}\end{bmatrix}=\frac{-1}{8}x^2e^{-4x^2}-\int 2x\frac{-1}{8}e^{-4x^2}=$$

$$=\frac{-1}{8}x^2e^{-4x^2}+\frac{1}{4}\int xe^{-4x^2}=\frac{-1}{8}x^2e^{-4x^2}+\frac{1}{4}\frac{-1}{8}\int -8xe^{-4x^2}=\frac{-1}{8}x^2e^{-4x^2}+\frac{1}{4}\frac{-1}{8}e^{-4x^2}+C=$$

$$=\frac{-1}{8}x^2e^{-4x^2}+\frac{1}{4}\frac{-1}{8}e^{-4x^2}+C=\frac{-1}{8}e^{-4x^2}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)+C\,.\ \dagger$$

7. Calcular $\int\frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx$

(Junio 2000)

Solución:

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-6x}=\frac{x+1}{x(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}=$$

$$=\frac{A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+3)}=\frac{(A+B+C)x^2+(A+3B-2C)x-6A}{x(x-2)(x+3)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ A+3B-2C=1 \\ -6A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{-1}{6} \\ B=\dfrac{3}{10} \\ C=\dfrac{-2}{15} \end{cases} \Rightarrow \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}=\frac{-1}{6x}+\frac{3}{10(x-2)}+\frac{-2}{15(x+3)}.$$

Por tanto $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx=\frac{-1}{6}\int\frac{1}{x}dx+\frac{3}{10}\int\frac{1}{x-2}dx-\frac{2}{15}\int\frac{1}{x+3}dx=$

$$=\frac{-1}{6}\ln|x|+\frac{3}{10}\ln|x-2|-\frac{2}{15}\ln|x+3|+C. \dagger$$

8. Calcular $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2+2x+3}dx$

(Septiembre 2000)

Solución:

El polinomio x^2+2x+3 no tiene raíces reales. Descompongamos el numerador buscando una expresión que sea la derivada del denominador, es decir, 2x + 2:

$$3x=\frac{3}{2}(2x+2-2)=\frac{3}{2}(2x+2)-3.$$

Entonces: $\displaystyle\frac{3x}{x^2+2x+3}=\frac{3}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x+3}-\frac{3}{x^2+2x+3}$. De este modo:

$$\int\frac{3x}{x^2+2x+3}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx-3\int\frac{1}{x^2+2x+3}dx=\textbf{(*)}$$

La última integral se calcula modificando adecuadamente la expresión x^2+2x+3 en otra del tipo $(x-m)^2+n^2$. En este caso $x^2+2x+3=(x+1)^2+2=(x+1)^2+\sqrt{2}^2$.

Por tanto: $\displaystyle\textbf{(*)}=\frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx-3\int\frac{1}{(x+1)^2+2}dx=$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx-3\int\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx-\frac{3\sqrt{2}}{2}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right)-\frac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C. \dagger$$

9. Resuelve $\int \frac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)}dx$

(Junio 2001)

Solución:

$$\frac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A\left(x^2+1\right)+\left(Bx+C\right)x}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{\left(A+B\right)x^2+Cx+A}{x\left(x^2+1\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=1\\C=0\\A=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1\\B=2\\C=0\end{cases}.$$

Entonces:

$$\int\frac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)}dx=\int\frac{-1}{x}dx+\int\frac{2x}{x^2+1}dx=-\ln|x|+\ln\left|x^2+1\right|+C=\ln\left|\frac{x^2+1}{x}\right|+C.$$ †

10. Calcula $\int\frac{x+2}{x^3-4x^2+4x}dx$

(Septiembre 2001)

Solución:

$$\frac{x+2}{x^3-4x^2+4x}=\frac{x+2}{x(x-2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}=\frac{A(x-2)^2+Bx(x-2)+Cx}{x(x-2)^2}=$$

$$=\frac{\left(A+B\right)x^2+\left(-4A-2B+C\right)x+4A}{x(x-2)^2}\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\-4A-2B+C=1\\4A=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{2}\\B=\frac{-1}{2}\\C=2\end{cases}.$$ Por tanto:

$$\int\frac{x+2}{x^3-4x^2+4x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-2}dx+2\int\frac{1}{(x-2)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x-2|-\frac{2}{x-2}+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{2}{x-2}+C=\ln\sqrt{\left|\frac{x}{x-2}\right|}-\frac{2}{x-2}+C.$$ †

11. Calcula $\int\frac{x^2-2}{x^3-3x+2}dx$

(Septiembre 2002)

Solución:

$$\frac{x^2-2}{x^3-3x+2}=\frac{x^2-2}{(x+2)(x-1)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{A(x-1)^2+B(x+2)(x-1)+C(x+2)}{(x+2)(x-1)^2}=\frac{(A+B)x^2+(-2A+B+C)x+(A-2B+2C)}{(x+2)(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=1\\-2A+B+C=0\\A-2B+2C=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\dfrac{2}{9}\\B=\dfrac{7}{9}\\C=\dfrac{-1}{3}\end{cases}.$$

Por tanto $\int\frac{x^2-2}{x^3-3x+2}dx=\frac{2}{9}\int\frac{1}{x+2}dx+\frac{7}{9}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{3}\int\frac{1}{(x-1)^2}dx=$

$$=\frac{2}{9}\ln|x+2|+\frac{7}{9}\ln|x-1|+\frac{1}{3(x-1)}+C.\ †$$

12. Calcula la siguiente integral: $\int\frac{Lx}{x}dx$ (L = logaritmo neperiano)

(Septiembre 2003)

Solución:

Procedamos por partes:

$$\int\frac{Lx}{x}dx=\begin{bmatrix}u=Lx & dv=\frac{1}{x}dx\\du=\frac{1}{x}dx & v=Lx\end{bmatrix}=(Lx)(Lx)-\int\frac{Lx}{x}dx\Rightarrow 2\int\frac{Lx}{x}dx=(Lx)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\frac{Lx}{x}dx=\frac{(Lx)^2}{2}+C.\ †$$

13. Determina f(x) sabiendo que f '''(x) = 24x; f ''(0) = 2, f '(0) = 1 y f(0) = 0.

(Junio 2005)

Solución:

f ''(x) será una primitiva de f '''(x) = 24x. Por tanto $f''(x)=12x^2+C$. Como f ''(0) = 2 $\Rightarrow$ $f''(0)=12\cdot 0^2+C=2\Rightarrow C=2$, con lo que $f''(x)=12x^2+2$. Una primitiva de esta última es $4x^3+2x+C$ y entonces $f'(x)=4x^3+2x+C$. Pero f '(0) = 1 $\Rightarrow$ C = 1 y $f'(x)=4x^3+2x+1$. Finalmente f(x) será una primitiva de f '(x) $\Rightarrow$ $f(x)=x^4+x^2+x+C$, y como f(0) = 0 $\Rightarrow$ C = 0 y $f(x)=x^4+x^2+x$. †

14. Calcula la primitiva de $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}dx$.

(Septiembre 2005)

Solución:

$$\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}dx = \int \frac{x}{x^2}dx + \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2}dx = \int \frac{1}{x}dx + \int x^{\frac{-3}{2}}dx = \ln|x| + \frac{x^{\frac{-1}{2}}}{\frac{-1}{2}} + C =$$

$$= \ln|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + C = \ln|x| - \frac{2\sqrt{x}}{x} + C. \dagger$$

15. Calcula la integral indefinida $\int \frac{x+2}{x^3-2x+1}dx$

(Junio 2006)

Solución:

$$\frac{x+2}{x^3-2x+1} = \frac{x+2}{(x-1)\left(x+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}} + \frac{C}{x-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{A\left(x+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right) + B(x-1)\left(x-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right) + C(x-1)\left(x+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)}{(x-1)\left(x+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{Ax^2 + Ax - A + Bx^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)Bx + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right)B + Cx^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right)Cx - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)C}{(x-1)\left(x+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2 + \left(A - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)B + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right)C\right)x + \left(-A + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right)B - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)C\right)}{(x-1)\left(x+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ A-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)B+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right)C=1 \\ -A+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right)B-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)C=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=\frac{7\sqrt{5}}{10}-\frac{3}{2} \\ C=-\frac{7\sqrt{5}}{10}-\frac{3}{2} \end{cases}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x+2}{x^3-2x+1}dx = 3\int \frac{1}{x-1}dx + \left(\frac{7\sqrt{5}}{10}-\frac{3}{2}\right)\int \frac{1}{x+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}}dx + \left(-\frac{7\sqrt{5}}{10}-\frac{3}{2}\right)\int \frac{1}{x+\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}}dx =$$

$$= 3\ln|x-1| + \left(\frac{7\sqrt{5}}{10}-\frac{3}{2}\right)\ln\left|x+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right| + \left(-\frac{7\sqrt{5}}{10}-\frac{3}{2}\right)\ln\left|x+\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right| + C.$$ †

16. Calcula la siguiente integral: $\int \frac{x^3+1}{x^2+4}dx$

(Septiembre 2006)

Solución:

Efectuando la división se tiene: $x^3+1=(x^2+4)x+(-4x+1)$. Dividiendo ambos miembros entre x^2+4: $\frac{x^3+1}{x^2+4}=x+\frac{-4x+1}{x^2+4}$.

Por tanto $\int \frac{x^3+1}{x^2+4}dx = \int x dx + \int \frac{-4x+1}{x^2+4}dx = \int x dx + \int \frac{-4x}{x^2+4}dx + \int \frac{1}{x^2+4}dx =$

$$= \int x dx - 2\int \frac{2x}{x^2+4}dx + \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx = \frac{x^2}{2} - 2\ln|x^2+4| + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$ †

17. Calcula la siguiente integral: $\int \frac{2}{1+\sqrt{x}}dx$

(Indicación: Puede ayudarte realizar un cambio de variable adecuado.)

(Junio 2007)

Solución:

Llamemos $1+\sqrt{x}=t$. Entonces $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}dt \Rightarrow dx = 2(t-1)dt$.

Sustituyendo:

$$\int \frac{2}{1+\sqrt{x}}dx = \int \frac{2}{t}2(t-1)dt = 4\int \frac{t-1}{t}dt = 4\int \left(1-\frac{1}{t}\right)dt = 4\left(t-\ln|t|\right)+C =$$

$$4\left(1+\sqrt{x}-\ln\left|1+\sqrt{x}\right|\right)+C = 4\sqrt{x}-4\ln\left|1+\sqrt{x}\right|+C'$$, donde se ha llamado $C' = 4 + C$. †

18. Calcula la siguiente integral: $\int \frac{x}{(x+1)^3}dx$

(Septiembre 2007)

Solución:

$$\frac{x}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3} = \frac{A(x+1)^2+B(x+1)+C}{(x+1)^3} =$$

$$= \frac{Ax^2+(2A+B)x+(A+B+C)}{(x+1)^3} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ 2A+B=1 \\ A+B+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=1 \\ C=-1 \end{cases}$$

Entonces $\frac{x}{(x+1)^3} = \frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}$, y por tanto:

$$\int \frac{x}{(x+1)^3}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2}dx - \int \frac{1}{(x+1)^3}dx = \frac{-1}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)^2}+C = -\frac{2x+1}{2(x+1)^2}+C.$$ †

19. Calcula la integral $\int \frac{2x^3-9x^2+9x+6}{x^2-5x+6}dx$

(Junio 2008)

Solución:

Efectuando la división se tiene $2x^3-9x^2+9x+6 = \left(x^2-5x+6\right)\left(2x+1\right)+2x$.

Dividiendo los dos miembros entre x^2-5x+6 tenemos:

$$\frac{2x^3-9x^2+9x+6}{x^2-5x+6} = 2x+1+\frac{2x}{x^2-5x+6}.$$

Además: $\frac{2x}{x^2-5x+6} = \frac{2x}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)} =$

$$=\frac{(A+B)x+(-3A-2B)}{(x-2)(x-3)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ -3A-2B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-4 \\ B=6 \end{cases}.$$

Entonces $\frac{2x^3-9x^2+9x+6}{x^2-5x+6}=2x+1+\frac{2x}{x^2-5x+6}=2x+1+\frac{-4}{x-2}+\frac{6}{x-3}$.

Por tanto $\int \frac{2x^3-9x^2+9x+6}{x^2-5x+6}dx=\int (2x+1)dx-4\int \frac{1}{x-2}dx+6\int \frac{1}{x-3}dx=$

$x^2+x-4\ln|x-2|+6\ln|x-3|+C$. †