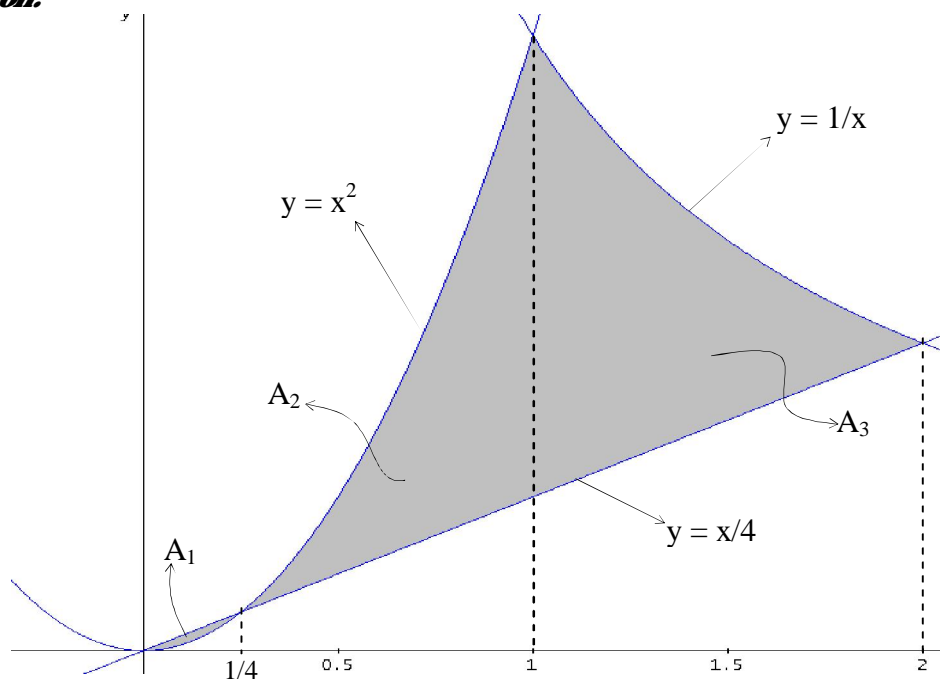


Integrales definidas. Aplicaciones

1. Dibujar el recinto limitado por $y = x^2$; $y = \frac{1}{x}$; $y = \frac{x}{4}$. Calcular su área. *(Junio 1997)*

Solución:



Observando el dibujo se tiene que el área del recinto limitado por las gráficas de las tres curvas es $A = A_1 + A_2 + A_3$.

$$A_1 = \int_a^b \left(\frac{x}{4} - x^2 \right) dx \text{ donde } a \text{ y } b \text{ son las soluciones de la ecuación } x^2 = \frac{x}{4} \Leftrightarrow 4x^2 = x$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(4x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \frac{1}{4}. \text{ Entonces:}$$

$$A_1 = \int_0^{1/4} \left(\frac{x}{4} - x^2 \right) dx = \left[\frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{1/4} = \left(\frac{(1/4)^2}{8} - \frac{(1/4)^3}{3} \right) - \left(\frac{0^2}{8} - \frac{0^3}{3} \right) = \frac{1}{128} - \frac{1}{192} = \frac{1}{384}$$

$$A_2 = \int_{1/4}^1 \left(x^2 - \frac{x}{4} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{8} \right]_{1/4}^1 = \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{8} \right) - \left(\frac{(1/4)^3}{3} - \frac{(1/4)^2}{8} \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8} \right) - \left(\frac{1}{192} - \frac{1}{128} \right) = \frac{5}{24} - \left(-\frac{1}{384} \right) = \frac{27}{128}$$

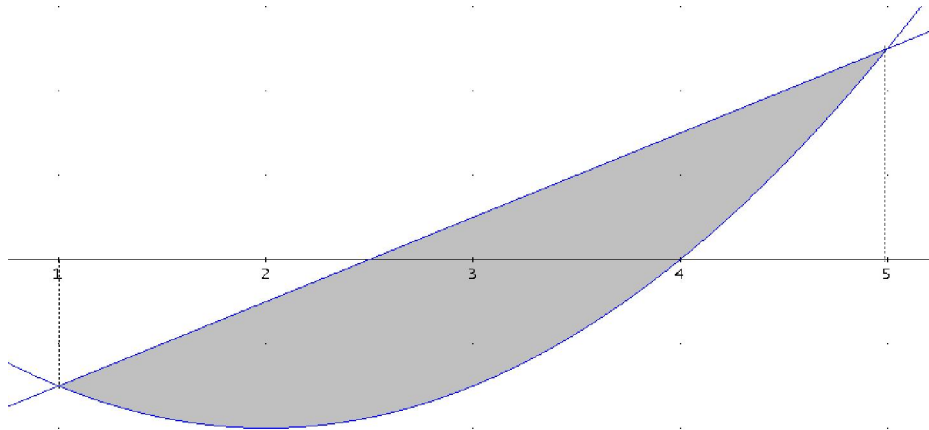
$$A_3 = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{4} \right) dx = \left[\ln|x| - \frac{x^2}{8} \right]_1^2 = \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) - \left(\ln 1 - \frac{1}{8} \right) = \ln 2 - \frac{3}{8}$$

Por tanto: $A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{1}{384} + \frac{27}{128} + \ln 2 - \frac{3}{8} = \ln 2 - \frac{31}{192} \cong 0,53 \text{ u}^2$ †

2. Dibujar el recinto limitado por $y = x^2 - 4x$; $y = 2x - 5$. Calcular su área.

(Septiembre 1997)

Solución:



Llamemos $f(x) = x^2 - 4x$ y $g(x) = 2x - 5$. Entonces:

$(f - g)(x) = (x^2 - 4x) - (2x - 5) = x^2 - 6x + 5$. Igualamos a cero y obtenemos los límites de integración (ver dibujo): $x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 5$

$$\int_1^5 (x^2 - 6x + 5) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x \right]_1^5 = \left(\frac{125}{3} - 50 \right) - \left(\frac{1}{3} + 2 \right) = \frac{124}{3} - 52 = -\frac{32}{3}$$

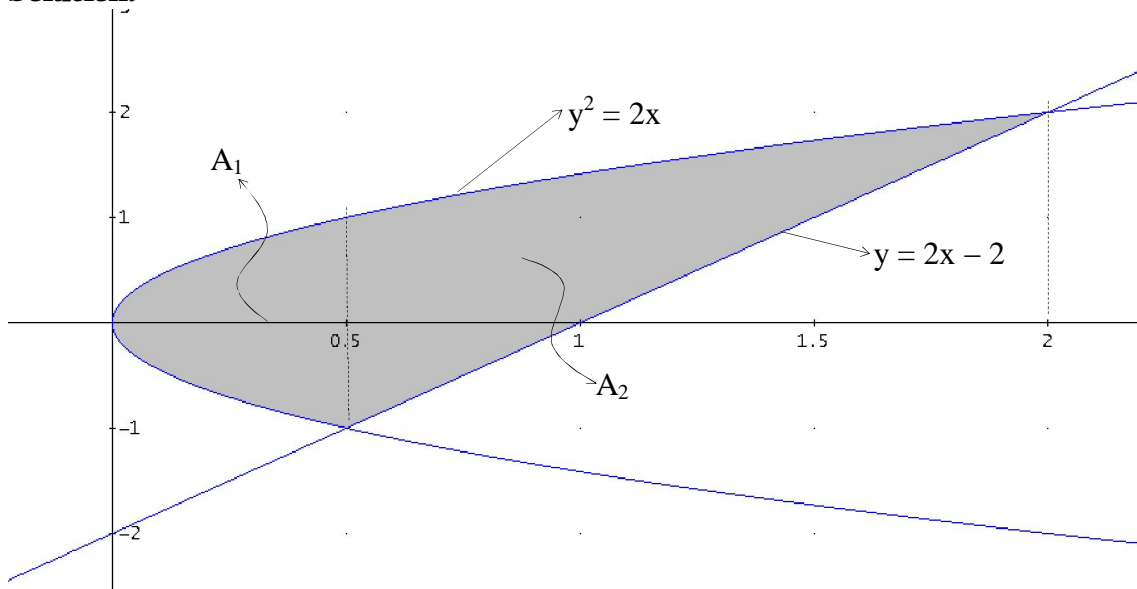
Por tanto, el área del recinto limitado por las gráficas de las dos funciones es:

$$A = \left| \int_1^5 (x^2 - 6x + 5) dx \right| = \left| -\frac{32}{3} \right| = \frac{32}{3} \cong 10,67 \text{ u}^2 \dagger$$

3. Dibujar el recinto limitado por las gráficas de $y^2 = 2x$, $2x - y - 2 = 0$. Calcular su área.

(Junio 1998)

Solución:



$y^2 = 2x \Rightarrow y = \sqrt{2x}$. Entonces (ver dibujo):

$$A_1 = 2 \int_0^{1/2} \sqrt{2x} \, dx = 2 \int_0^{1/2} (2x)^{1/2} \, dx = 2\sqrt{2} \int_0^{1/2} (x)^{1/2} \, dx = \left[2\sqrt{2} \frac{2}{3} x\sqrt{x} \right]_0^{1/2} =$$

$$= \left[\frac{4}{3} x\sqrt{2x} \right]_0^{1/2} = \frac{4}{3} \frac{1}{2} \sqrt{2 \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$A_2 = \int_{1/2}^2 (\sqrt{2x} - (2x - 2)) \, dx = \int_{1/2}^2 (\sqrt{2x} - 2x + 2) \, dx = \left[\frac{2}{3} x\sqrt{2x} - x^2 + 2x \right]_{1/2}^2 =$$

$$\left(\frac{2}{3} 2\sqrt{4} - 4 + 4 \right) - \left(\frac{2}{3} \frac{1}{2} \sqrt{2 \frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 2 \frac{1}{2} \right) = \frac{8}{3} - \frac{13}{12} = \frac{19}{12}$$

Por tanto el área del recinto limitado por las gráficas de las dos funciones es:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{2}{3} + \frac{19}{12} = \frac{9}{4} = 2,25 \, u^2 \quad \dagger$$

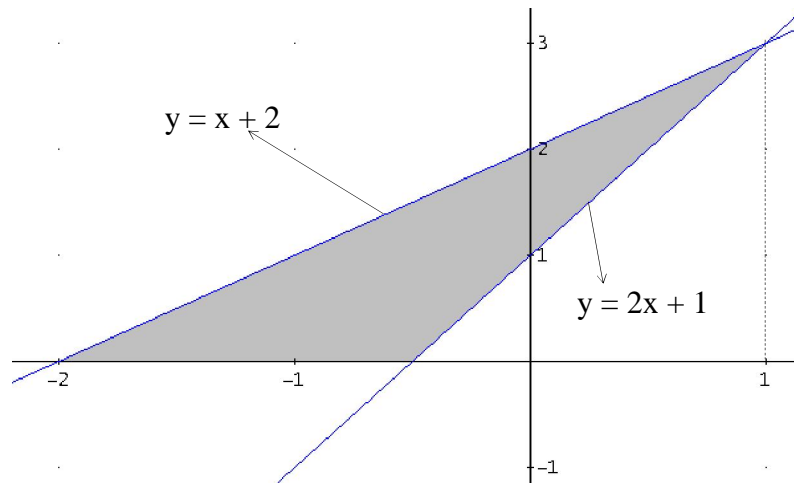
4. Hallar la ecuación de la recta tangente a $y = x^2 + 2$, en el punto de abscisa $x = 1$.
 Calcular el área del recinto limitado por $y = x + 2$, la tangente anterior y el eje OX.

(Septiembre 1998)

Solución:

La ecuación de la recta tangente es $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 3 = 2(x - 1) \Rightarrow$
 $\Rightarrow y = 2x + 1$

Las dos rectas se cortan en el punto, cuya coordenada x , es la solución de la ecuación
 $2x + 1 = x + 2 \Rightarrow x = 1$



Por tanto el área del recinto es (ver dibujo):

$$A = \int_{-2}^1 ((x + 2) - (2x + 1)) \, dx = \int_{-2}^1 (-x + 1) \, dx = \left[-\frac{x^2}{2} + x \right]_{-2}^1 = \left(\frac{-1}{2} + 1 \right) - (-2 - 2) =$$

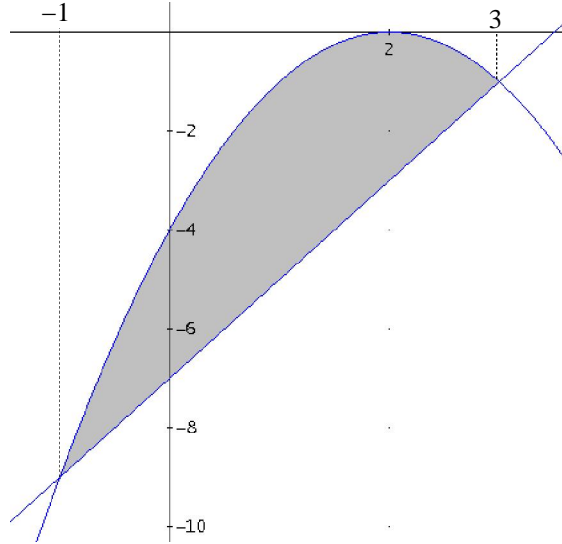
$$= \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2} = 4,5 \, u^2 \quad \dagger$$

5. Calcular el área de la región del plano limitada por las gráficas de las funciones:
 $y = -x^2 + 4x - 4$ e $y = 2x - 7$.

(Junio 1999)

Solución:

Los límites de integración son las soluciones de la ecuación $-x^2 + 4x - 4 = 2x - 7 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 3$



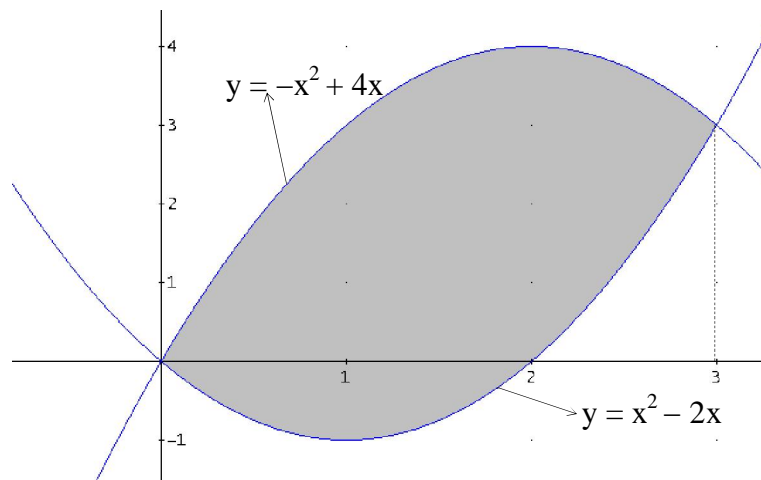
Por tanto el área pedida es:

$$A = \int_{-1}^3 ((-x^2 + 4x - 4) - (2x - 7)) dx = \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3) dx = \left[\frac{-x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-1}^3 =$$
$$= (-9 + 9 + 9) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3 \right) = 9 - \left(-\frac{5}{3} \right) = \frac{32}{3} \cong 10,67 \text{ u}^2 \dagger$$

6. Halla el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $y = x^2 - 2x$ e $y = -x^2 + 4x$.

(Septiembre 1999)

Solución:



Los límites de integración son las soluciones de la ecuación $x^2 - 2x = -x^2 + 4x \Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 3$

El área pedida del recinto limitado por las gráficas de las funciones es:

$$A = \int_0^3 ((-x^2 + 4x) - (x^2 - 2x)) dx = \int_0^3 (-2x^2 + 6x) dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^3 =$$
$$= \left(\frac{-2 \cdot 3^3}{3} + 3 \cdot 3^2 \right) - \left(\frac{-2 \cdot 0^3}{3} + 3 \cdot 0^2 \right) = -18 + 27 = 9 \text{ u}^2$$

7. Calcular el área del recinto limitado por las curvas $y = x^2 - 1$, $y = 11 - x$ y el eje OX. Dibujar el recinto.

(Junio 2000)

Solución:

8. Hallar el área del recinto plano delimitado por las curvas de ecuación $y = x^2 - 2$ e $y = -|x|$. Dibujar el recinto.

(Septiembre 2000)

Solución:

9. Dada la parábola $y = \frac{x^2}{4}$ y la recta $y = x$

- Dibujar las gráficas de la parábola y de la recta.
- Señalar el recinto plano comprendido entre las dos gráficas anteriores.
- Calcular el área del recinto plano señalado.

(Junio 2001)

Solución:

10. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$ en el punto de abscisa $x = 1$. Calcular el área del recinto limitado por la recta tangente y la curva dada.

(Junio 2002)

Solución:

11. Dadas las funciones $y = -x^2 + 4$ e $y = |x + 2|$:

- Dibujar ambas gráficas.
- Señalar el recinto plano comprendido entre las dos gráficas anteriores.
- Calcular el área del recinto plano señalado.

(Septiembre 2002)

Solución:

12. Dada la curva $y = x^2 - 4x$ y la recta $y = 3x - 6$:

- Dibuja la gráfica de ambas.
- Señala el recinto plano comprendido entre ellas.
- Calcula el área del recinto señalado.

(Junio 2003)

Solución:

13. La curva $y = 2x^2$ divide al cuadrado de vértices A(0, 0), B(1, 0), C(1, 1) y D(0, 1) en dos recintos.

- Dibuja dichos recintos.
- Halla el área de cada uno de ellos.

(Junio 2004)

Solución:

14. Considera la función $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

- Haz un dibujo aproximado de su gráfica.
- Calcula el área encerrada por la gráfica y el eje X.

(Septiembre 2004)

Solución:

15. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 1 - x$: a) Esboza el recinto encerrado entre sus gráficas. b) Calcula el área de dicho recinto.

(Junio 2006)

Solución:

16. Dibuja aproximadamente las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 3$ y $g(x) = 2x$, y sombrea el área que queda encerrada entre ellas. Calcula el valor de dicho área.

(Septiembre 2006)

Solución:

17. Dadas las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = -x + \frac{5}{2}$, se pide: a) Esboza sus gráficas y sombrea el recinto encerrado entre ellas. b) Calcula el área de dicho recinto.

(Junio 2007)

Solución:

18. Esboza las gráficas de las parábolas $f(x) = 2x^2$ y $g(x) = -x^2 + 3$, sombreado el recinto cerrado que determinan. Calcula el área de dicho recinto.

(Septiembre 2007)

Solución:

19. Calcula la integral definida $\int_0^\pi e^x \sin x \, dx$

(Junio 2008)

Solución:

20. De la función $f(x) = (x + a)\sin x$, donde a es un número real, se sabe que la integral definida $\int_0^\pi f(x) \, dx$ es tres veces el valor de la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 0$. Calcula el valor de a .

(Septiembre 2008)

Solución:

21. Definición de primitiva de una función. Sabiendo que $F(x) = e^{x^2}$ es una primitiva de la función $f(x)$:

- Comprueba que $f(x)$ es una función creciente en \mathbb{R} .
- Calcula el área determinada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas, y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

(Septiembre 2008)

Solución: