

Continuidad de las funciones. Derivadas

1. Estudiar en $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$ la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2x}{\pi} + 2 & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 2 + \operatorname{sen} x & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(Junio 1997)

Solución:

f es claramente continua en todo \mathbb{R} salvo, quizás, en $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$. Estudiemos la continuidad en estos puntos:

- $x = 0$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2x}{\pi} + 2 \right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ por ser distintos los límites laterales y}$$

por tanto f no es continua en 0 (discontinuidad de salto de longitud $L = 1$)

- $x = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{2x}{\pi} + 2 \right) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (2 + \operatorname{sen} x) = 3 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 3 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f \text{ es continua en } x = \frac{\pi}{2}$$

Resumiendo: f es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

Estudiemos ahora la derivabilidad. La función f es claramente derivable en

$$(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, +\infty\right), \text{ con derivada } f'(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{\pi} & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{cos} x & \text{si } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

En $x = 0$ no es derivable pues no es continua, y en $x = \frac{\pi}{2}$ se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} f' \left(\frac{\pi^-}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \left(\frac{2}{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} \\ f' \left(\frac{\pi^+}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} (\cos x) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow f \text{ no es derivable en el punto } x = \frac{\pi}{2}, \text{ pues las}$$

derivadas laterales son distintas.

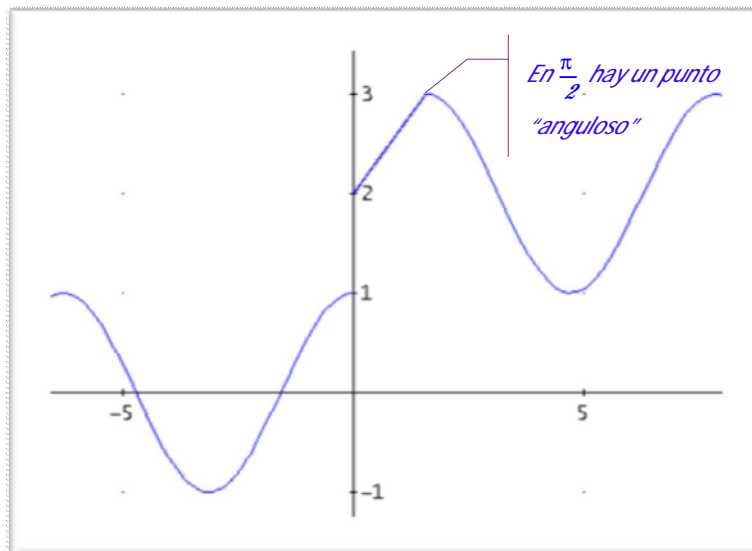
Resumiendo: f es derivable en $i - \left\{ 0, \frac{\pi}{2} \right\}$

La derivabilidad en $x = \frac{\pi}{2}$ también se podría haber estudiado utilizando la definición de derivada de una función para hallar las derivadas laterales a la izquierda y a la derecha de $\frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \frac{\left(\frac{2x}{\pi} + 2\right) - \left(\frac{2 \cdot \frac{\pi}{2}}{\pi} + 2\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \frac{\frac{2x}{\pi} + 2 - 3}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \frac{\frac{2x - \pi}{\pi}}{\frac{2x - \pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \frac{(2 + \sin x) - \left(2 + \sin \frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \cos x = 0$$

(en este último paso se ha utilizado la regla de L'Hôpital).



†

2. Calcular a y b para que f(x) sea continua en x = 0 y x = 1

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ a + x^3 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{b}{2x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Para los valores de a y b obtenidos, estudiar la derivabilidad en x = 0 y x = 1.

(Septiembre 1997)

Solución:

Para que f sea continua en 0 debe existir el límite cuando x tiende a 0 y coincidir con la imagen de la función en 0. El límite en 0 existirá si existen los límites laterales y son iguales:

$$f \text{ es continua en } 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = \cos 0 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a + x^3) = a \end{array} \right] \Leftrightarrow a = 1$$

Análogamente, en x = 1:

$$f \text{ es continua en } 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = a + 1^3 = 2 \text{ (pues } a$$

$$= 1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (a + x^3) = a + 1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{b}{2x} = \frac{b}{2} \end{array} \right] \Leftrightarrow \frac{b}{2} = 2 \Leftrightarrow b = 4$$

Para estos dos valores de a y b la función queda de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 + x^3 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{2}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Estudiemos ahora la derivabilidad. La función f es claramente derivable en

$$(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty), \text{ con derivada } f'(x) = \begin{cases} -\text{sen } x & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ -\frac{2}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En x = 0 se tiene:

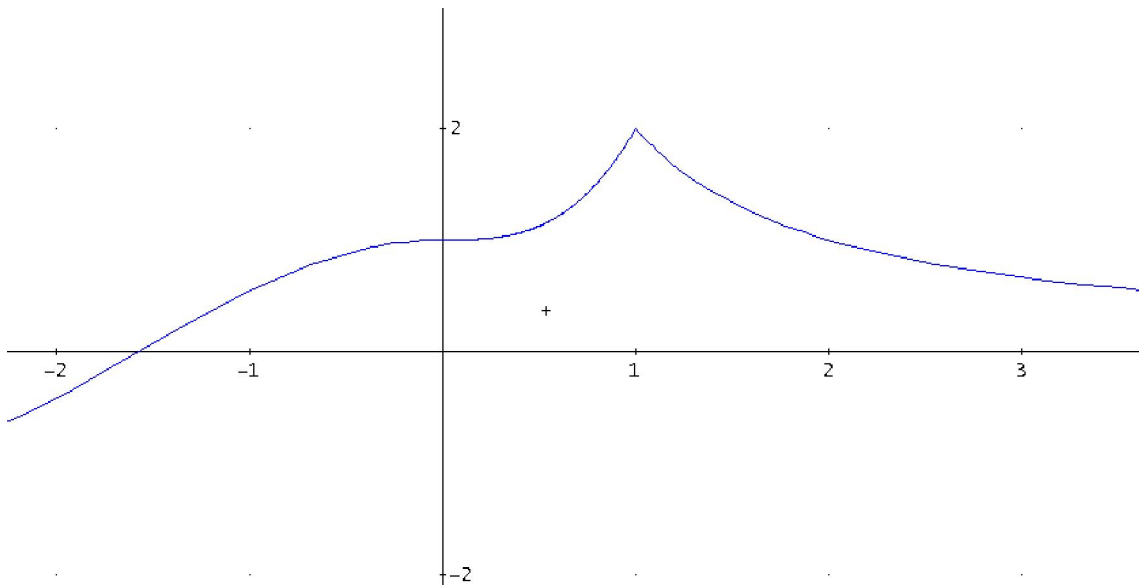
$$\begin{cases} f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-\sin x) = 0 \\ f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow f \text{ es derivable en el punto } x = 0, \text{ pues las}$$

derivadas laterales coinciden. Además $f'(0) = 0$.

En $x = 1$ se tiene:

$$\begin{cases} f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2) = 3 \\ f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\frac{2}{x^2}\right) = -2 \end{cases} \Rightarrow f \text{ no es derivable en el punto } x = 1, \text{ pues las}$$

derivadas laterales son distintas.



Por tanto f es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ con derivada $f'(x) = \begin{cases} -\sin x & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -\frac{2}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

3. Calcular a y b para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$ y $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} e^x + a & \text{si } x \leq 0 \\ ax^2 + 2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{b}{2x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Para los valores de a y b obtenidos anteriormente, estudiar la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

(Junio 1998)

Solución:

Para que f sea continua en 0 debe existir el límite cuando x tiende a 0 y coincidir con la imagen de la función en 0 . El límite en 0 existirá si existen los límites laterales y son iguales:

$$f \text{ es continua en } 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = e^0 + a = 1 + a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x + a) = e^0 + a = 1 + a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax^2 + 2) = 2 \end{array} \right] \Leftrightarrow 1 + a = 2 \Leftrightarrow a = 1$$

Análogamente, en $x = 1$:

$$f \text{ es continua en } 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = a + 2 = 3$$

$$(\text{recuérdese que } a = 1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{b}{2x} \right) = \frac{b}{2} \end{array} \right] \Leftrightarrow \frac{b}{2} = 3 \Leftrightarrow b = 6$$

Para estos dos valores de a y b la función queda de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{3}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Estudiemos ahora la derivabilidad. La función f es claramente derivable en

$$(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty), \text{ con derivada } f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 1. \\ -\frac{3}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En $x = 0$ se tiene:

$$\begin{cases} f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x) = 1 \\ f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x) = 0 \end{cases} \Rightarrow f \text{ no es derivable en el punto } x = 0, \text{ pues las}$$

derivadas laterales son distintas.

En $x = 1$ se tiene:

$$\begin{cases} f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x) = 2 \\ f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\frac{3}{x^2} \right) = -3 \end{cases} \Rightarrow f \text{ no es derivable en el punto } x = 1, \text{ pues las}$$

derivadas laterales son distintas.

$$\text{Por tanto } f \text{ es derivable en } \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \text{ con derivada } f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ -\frac{3}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

4. Determinar a y b para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$ y $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 + ax^2 - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{a}{2x} & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ e^{x-1} + 2b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Para los valores de a y b obtenidos anteriormente, estudiar si $f(x)$ es derivable en $x = 1$.

(Septiembre 1998)

Solución:

Para que f sea continua en -1 debe existir el límite cuando x tiende a -1 y coincidir con la imagen de la función en -1 . El límite en -1 existirá si existen los límites laterales y son iguales:

$$f \text{ es continua en } -1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) = 2(-1)^3 + a(-1)^2 - 1 = a - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (2x^3 + ax^2 - 1) = 2(-1)^3 + a(-1)^2 - 1 = a - 3 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{a}{2x} \right) = -\frac{a}{2} \end{array} \right] \Leftrightarrow a - 3 = -\frac{a}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a - 6 = -a \Leftrightarrow 3a = 6 \Leftrightarrow a = 2$$

Análogamente, en $x = 1$:

$$f \text{ es continua en } 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = \frac{2}{2 \cdot 1} = 1$$

$$(\text{recuérdese que } a = 2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x} \right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (e^{x-1} + 2b) = e^0 + 2b = 1 + 2b \end{array} \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = 1 + 2b \Leftrightarrow 0 = 2b \Leftrightarrow b = 0$$

Para estos dos valores de a y b la función queda de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 2x^2 - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ e^{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Obsérvese en primer lugar que f está definida en $\mathbb{R} - \{0\}$, por tanto en $x = 0$ la función no es continua ni derivable: en $x = 0$ hay una asíntota vertical.

Estudiemos ahora la derivabilidad. La función f es claramente derivable en

$$(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty) - \{0\}, \text{ con derivada } f'(x) = \begin{cases} 6x^2 + 4x & \text{si } x < -1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{si } -1 < x < 1. \\ e^{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En $x = -1$ se tiene:

$$\begin{cases} f'(-1^-) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (6x^2 + 4x) = 2 \\ f'(-1^+) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -1 \end{cases} \Rightarrow f \text{ no es derivable en el punto } x = -1, \text{ pues}$$

las derivadas laterales son distintas.

En $x = 1$ se tiene:

$$\begin{cases} f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -1 \\ f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (e^{x-1}) = 1 \end{cases} \Rightarrow f \text{ no es derivable en el punto } x = 1, \text{ pues las}$$

derivadas laterales son distintas.

Por tanto f es derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ con derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} 6x^2 + 4x & \text{si } x < -1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{si } -1 < x < 0 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ e^{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

5. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{si } x \leq -1 \\ 2 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(Junio 1999)

Solución:

La función f es claramente continua en todo \mathbb{R} salvo, quizás, en $x = -1$ y $x = 1$. Estudiemos la continuidad en estos dos puntos.

En $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (3x + 5) = 3(-1) + 5 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2 = f(-1) \Rightarrow f \text{ es continua en}$$

$x = -1$.

En $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 3x + 1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{no existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ por ser los límites laterales}$$

distintos $\Rightarrow f$ no es continua en $x = 1$.

La función f es claramente derivable en $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ con derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En $x = -1$ se tiene:

$$\begin{cases} f'(-1^-) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = 3 \\ f'(-1^+) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow f \text{ no es derivable en el punto } x = -1, \text{ pues las derivadas}$$

laterales son distintas.

Por otro lado, como f no es continua en $x = 1$, f no es derivable en $x = 1$.

$$\text{Resumiendo, } f \text{ es derivable en } \mathbb{R} - \{-1, 1\} \text{ con derivada } f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

†

6. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ a + bx & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, determinar a y b de modo que sea continua. Para los valores que se obtengan, estudiar la derivabilidad. *(Junio 2000)*

Solución:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a + bx) = a \end{cases} \Rightarrow \text{para que } f \text{ sea continua en } x = 0 \text{ debe de ser } a = 0 \text{ pues en}$$

este caso $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} bx = b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{para que } f \text{ sea continua en } x = 1 \text{ ha de ser } b = 3 \text{ pues en este}$$

caso $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 = f(1)$

Por tanto si $a = 0$ y $b = 3$, f es continua en todo \mathbb{R} y queda de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 3x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En principio, f es claramente derivable en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ con derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Estudiemos la derivabilidad en $x = 0$ y $x = 1$

$$\begin{cases} f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x) = 0 \\ f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 3 \end{cases} \Rightarrow f \text{ no es derivable en el punto } x = 0, \text{ pues las}$$

derivadas laterales son distintas.

$$\begin{cases} f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 3 \\ f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow f \text{ no es derivable en el punto } x = 1, \text{ pues las derivadas laterales}$$

son distintas.

En resumen: f es derivable en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ con derivada $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

7. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x} & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(Septiembre 2000)

Solución:

La función f es claramente continua en todo \mathbb{R} salvo, quizás, en $x = 1$. Estudiemos la continuidad en este punto:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2-x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^2 + 4x - 2) = 1 \end{cases} \Rightarrow f \text{ es continua en } x = 1 \text{ pues } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1)$$

La función es derivable en todo $\mathbb{R} - \{1\}$ con derivada $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-x)^2} & \text{si } x < 1 \\ -2x + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Estudiemos la derivabilidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(2-x)^2} = 1 \\ f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-2x+4) = 2 \end{cases} \Rightarrow f \text{ no es derivable en el punto } x = 1, \text{ pues las derivadas laterales no coinciden.}$$

Resumiendo: f es derivable en todo $\mathbb{R} - \{1\}$ con derivada $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-x)^2} & \text{si } x < 1 \\ -2x+4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

8. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2+k & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Determina k para que f(x) sea continua en $x = 1$

b) ¿Es la función f(x) para el valor k calculado derivable en $x = 1$?

(Junio 2001)

Solución:

a) $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x+5) = 7 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2+k) = 1+k \end{cases} \Rightarrow 7 = 1+k \Rightarrow k = 6. \text{ Por tanto si } k = 6 \text{ se cumple que } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 7 = f(1) \text{ y } f \text{ es continua en } x = 1.$

b) Si $k = 1$ la función es: $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2+k & \text{si } x > 1 \end{cases}$, que es derivable en todo \mathbb{R} salvo, quizás en $x = 1$, con derivada $f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Estudiamos la derivabilidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 2 \\ f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x) = 2 \end{cases} \Rightarrow f \text{ es derivable en } x = 1 \text{ pues coinciden las derivadas laterales.}$$

Por tanto f es derivable en todo \mathbb{R} con derivada $f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

9. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \leq -2 \\ ax^2+bx & \text{si } -2 < x \leq 4 \\ x-4 & \text{si } 4 < x \end{cases}$, determina a y b de modo que sea continua. Para los valores que se obtengan, estudia la derivabilidad.

(Septiembre 2001)

Solución:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (2x + 1) = -3 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (ax^2 + bx) = 4a - 2b \end{cases} \Rightarrow f \text{ será continua en } x = -2 \text{ si } -3 = 4a - 2b$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (ax^2 + bx) = 16a + 4b \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (x - 4) = 0 \end{cases} \Rightarrow f \text{ será continua en } x = 4 \text{ si } 16a + 4b = 0$$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} 4a + 2b = -3 \\ 16a + 4b = 0 \end{cases}$, se obtiene $a = \frac{-1}{4}$ y $b = 1$. Para estos dos valores f

es continua en todo \mathbb{R} y la función queda de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{-1}{4}x^2 + x & \text{si } -2 < x \leq 4 \\ x - 4 & \text{si } 4 < x \end{cases}$$

En principio, f es claramente derivable en $\mathbb{R} - \{-2, 4\}$ con derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ \frac{-1}{2}x + 1 & \text{si } -2 < x < 4 \\ 1 & \text{si } 4 < x \end{cases}$$

Estudiamos la derivabilidad en $x = -2$ y $x = 4$

$$\begin{cases} f'(-2^-) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f'(x) = 2 \\ f'(-2^+) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{-1}{2}x + 1 \right) = 2 \end{cases} \Rightarrow f \text{ es derivable en el punto } x = -2, \text{ pues}$$

las derivadas laterales coinciden.

$$\begin{cases} f'(4^-) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{-1}{2}x + 1 \right) = -1 \\ f'(4^+) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow f \text{ no es derivable en el punto } x = 4, \text{ pues}$$

las derivadas laterales son distintas.

En resumen: f es derivable en $\mathbb{R} - \{4\}$ con derivada

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{3}{2}x - 3 & \text{si } -2 < x < 4 \\ 1 & \text{si } 4 < x \end{cases}$$

10. La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{L(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es derivable en el punto $x = 0$. Calcula cuánto valen las constantes b y c . ($L =$ logaritmo neperiano).

(Junio 2002)

Solución:

Como es derivable en $x = 0$, entonces es continua en $x = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = c = f(0)$ y los límites laterales deben coincidir y ser iguales a c :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = c$$

Utilicemos la regla de L'Hôpital para calcular el límite a la derecha de cero:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{L(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+x} = 1.$$

Por tanto para que f sea derivable en $x = 0$ debe de ser $c = 1$

$$\text{La derivada de la función } f \text{ es: } f'(x) = \begin{cases} 2x + b & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x - (1+x)L(1+x)}{x^2(1+x)} & \text{si } x > 0 \end{cases}, \text{ pues la derivada}$$

de la función $y = \frac{L(1+x)}{x}$ es:

$$y' = \frac{\frac{1}{1+x}x - L(1+x) \cdot 1}{x^2} = \frac{x - (1+x)L(1+x)}{x^2} = \frac{x - (1+x)L(1+x)}{x^2(1+x)}$$

Como f es derivable en $x = 0$, coinciden las derivadas laterales en $x = 0$:

$$\begin{cases} f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x + b) = b \\ f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - (1+x)L(1+x)}{x^2(1+x)} = \frac{-1}{2} \Rightarrow b = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

El segundo de los límites se ha hecho volviendo a utilizar la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - (1+x)L(1+x)}{x^2(1+x)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \left(L(1+x) + (1+x) \frac{1}{1+x} \right)}{2x(1+x) + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-L(1+x)}{3x^2 + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{6x + 2} = \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

11. Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

- Define continuidad de una función en un punto.
- ¿En qué puntos es continua la función $f(x)$?
- ¿En qué puntos es derivable la función $f(x)$?
- Si una función no es continua en un punto, ¿puede ser derivable en él?

(Septiembre 2003)

Solución:

- a) Una función f es continua en un punto $x = a$ si existe el límite de la función en $x = a$ y coincide con la imagen de la función en dicho punto:

$$f \text{ continua en } a \Leftrightarrow \text{existe } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

- b) f es continua en todo \mathbb{R} , salvo, quizás en $x = 3$. Estudiemos la continuidad en este punto:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 4x + 3) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (2x - 4) = 2 \end{cases} \Rightarrow f \text{ no es continua en } x = 3, \text{ pues al no coincidir}$$

los límites laterales, no existe el límite de la función en $x = 3$

- c) Si f no es continua en un punto, entonces no es derivable en dicho punto. Por tanto f no es derivable en $x = 3$. En el resto de puntos sí que es derivable (las funciones polinómicas son derivables en todo \mathbb{R}), con derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x < 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- d) No. Una condición necesaria para que una función sea continua es que sea derivable, pero no es suficiente: es decir, una función continua no tiene por qué ser derivable. De aquí se deduce que toda función que no es continua en un punto, no es derivable en dicho punto. Simbólicamente:

$$[f \text{ derivable} \Rightarrow f \text{ continua}] \Rightarrow [f \text{ no continua} \Rightarrow f \text{ no derivable}] \dagger$$

12. Determina b y c para que la función $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + bx + c & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- Sea derivable en todos los puntos de \mathbb{R} .
- Calcula la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa 1.

(Junio 2004)

Solución:

- a) Para que f sea continua en $x = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 8$ y para que exista $\lim_{x \rightarrow 2} f'(x)$ deben de existir los laterales y ser iguales:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^3) = 8 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + bx + c) = -4 + 2b + c \end{cases} \Rightarrow 8 = -4 + 2b + c \Rightarrow 2b + c = 12 \quad (*)$$

La función derivada en $x = 2$ es:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x < 2 \\ -2x + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Para que f sea derivable en $x = 2$ las derivadas laterales tienen que ser iguales:

$$\begin{cases} f'(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x^2) = 12 \\ f'(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-2x + b) = -4 + b \end{cases} \Rightarrow 12 = -4 + b \Rightarrow b = 16.$$

Sustituyendo en (*), $32 + c = 12 \Rightarrow c = -20$.

- b) La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 1 = 3(x - 1)$
 $\Rightarrow y - 1 = 3x - 3 \Rightarrow y = 3x - 2$.

13. Considera la función siguiente $f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Determina los valores de a y b para que sea derivable en todos los puntos.
 b) Esboza la gráfica de la curva representativa de la función para los valores de a y b calculados.

(Septiembre 2004)

Solución:

- a) Para que f sea continua en $x = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 - x^2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b \end{cases} \Rightarrow a + b = 0 \quad (*)$$

La derivada de f en $x = 1$ es:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x & \text{si } x < 1 \\ a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Para que f sea derivable en $x = 1$ deben de coincidir las derivadas laterales:

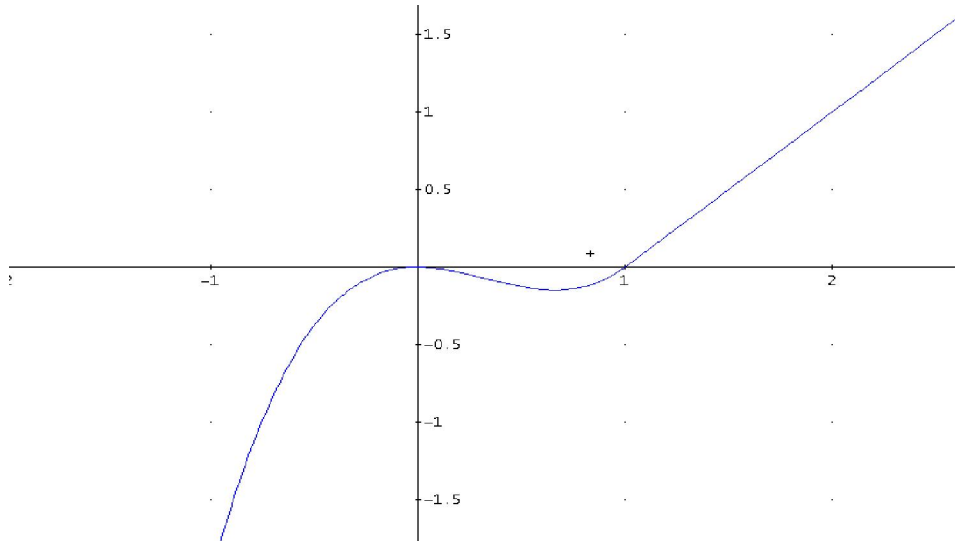
$$\begin{cases} f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 - 2x) = 1 \\ f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = a \end{cases} \Rightarrow a = 1$$

Sustituyendo en (*), $1 + b = 0 \Rightarrow b = -1$

Por tanto, para que f sea derivable en todos los puntos han de ser $a = 1$ y $b = -1$. En este

caso la función es: $f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b)



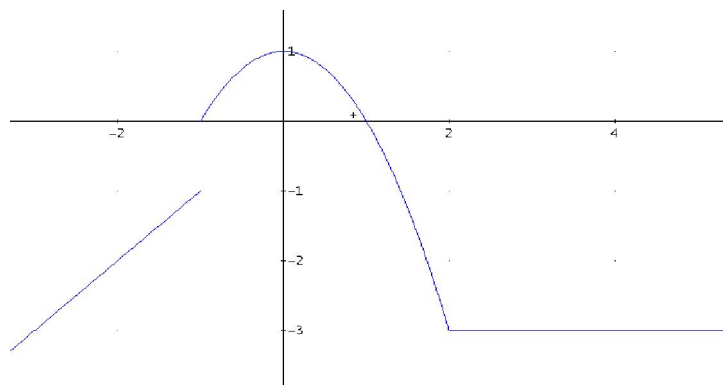
14. Estudia si la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ -3 & \text{si } 2 < x \end{cases}$ es continua en los puntos $x = -1$ y $x = 2$. Representa gráficamente dicha función.

(Junio 2005)

Solución:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (1 - x^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{no existe } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ porque los límites laterales no coinciden y } f \text{ no es continua en } x = -1 \text{ (discontinuidad de salto finito de longitud 1).}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (1 - x^2) = -3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -3 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3 = f(2) \Rightarrow f \text{ es continua en } x = 2.$$



15. Determina, si es posible, los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$ para que la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1-e^x}{2x+1-e^{2x}} & \text{si } x < 0 \\ (2x-k)^2 - 6 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, \text{ sea continua en } x = 0.$$

(Septiembre 2006)

Solución:

El límite por la izquierda de cero lo calcularemos utilizando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1-e^x}{2x+1-e^{2x}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-e^x}{2-2e^{2x}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-e^x}{-4e^{2x}} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

El límite por la derecha de cero es:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ((2x-k)^2 - 6) = k^2 - 6$$

Para que exista el límite deben de coincidir los límites laterales:

$$k^2 - 6 = \frac{1}{4} \Rightarrow k^2 = \frac{1}{4} + 6 \Rightarrow k^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{25}{4}} \Rightarrow k = \pm \frac{5}{2}$$

Para estos valores de k , f será continua en $x = 0$ pues entonces $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ †

16. a) Define el concepto de función continua en un punto.

b) Si $f(x) = \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{4x}$, indica de forma razonada en qué valor $x = a$ no está definida $f(x)$.

c) Calcula el valor de $b \in \mathbb{R}$ para que la función $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ b & \text{si } x = a \end{cases}$ sea continua.

(Junio 2007)

Solución:

a) Una función f es continua en un punto $x = a$ si existe el límite de la función en $x = a$ y coincide con la imagen de la función en dicho punto:

$$f \text{ continua en } a \Leftrightarrow \text{existe } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

b) f no está definida en $x = 0$ porque anula el denominador de la expresión $\frac{e^{3x} - e^{-3x}}{4x}$.

c) g es continua en todo punto donde lo sea f , es decir en $\mathbb{R} - \{0\}$. Es decir, la función

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ b & \text{si } x = 0 \end{cases}, \text{ es continua en } \mathbb{R} - \{0\}. \text{ Para que } g \text{ sea continua en } x = 0,$$

debe existir $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) = b$. Entonces:

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^{3x} + 3e^{-3x}}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, donde se ha utilizado la regla de L'Hôpital.

Por tanto el valor de b para que g sea continua es $b = \frac{3}{2}$.