Sistemas de ecuaciones lineales

1. Estudiar el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} ax+y+z=2a \\ x-y+z=a-1 \\ x+(a-1)y+az=a+3 \end{array}\right\}$$

Resolverlo (si es posible) para $a=-1$.

(Junio 1997)

Solución:

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & a-1 & a \end{pmatrix}$, cuyo rango es al menos 2 pues existe un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1-(-1)=2$.

Su determinante es:

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & a-1 & a \end{vmatrix}=(-a^2+1+a-1)-(-1+a+a^2-a)=(-a^2+a)-(a^2-1)=$$

$=-2a^2+a+1$. Entonces $|A|=0 \Leftrightarrow -2a^2+a+1=0 \Leftrightarrow a=\dfrac{-1}{2}$ ó $a=1$

Por tanto:

- Si $a\neq\dfrac{-1}{2}$ y $a\neq 1 \Rightarrow$ rango(A) = 3
- Si $a=\dfrac{-1}{2} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ y rango(A) = 2
- Si $a=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y también rango (A) = 2

La matriz ampliada es $B=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2a \\ 1 & -1 & 1 & a-1 \\ 1 & a-1 & a & a+3 \end{pmatrix}$

- Si $a\neq\dfrac{-1}{2}$ y $a\neq 1 \Rightarrow$ rango(A) = 3 = rango(B) $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

- Si $a = \frac{-1}{2} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -3/2 \\ 1 & -3/2 & -1/2 & 5/2 \end{pmatrix}$ cuyo rango es 3 pues

$$\begin{vmatrix} -1/2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3/2 \\ 1 & -3/2 & 5/2 \end{vmatrix} = \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) - \left(1 + \frac{5}{2} - \frac{9}{8}\right) = \frac{5}{4} - \frac{19}{8} = \frac{-9}{8} \neq 0$$

En este caso rango(B) = 3 ≠ rango(A) = 2 y el sistema es incompatible.

- Si a = 1 ⇒ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 3 pues

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-4+0+0) - (-2+4+0) = -4-2 = -6 \neq 0$$

Por tanto rango(B) = 3 ≠ rango(A) = 2 y el sistema también es incompatible.

Si a = −1 el sistema es compatible determinado (solución única): $\left.\begin{array}{r} -x+y+z=-2 \\ x-y+z=-2 \\ x-2y-z=2 \end{array}\right\}$.

En este caso $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1+1-2) - (-1-1+2) = (-2) - 0 = -2$

Por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{(-2+2+4)-(-2+2+4)}{-2} = \frac{0}{-2} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{(-2-2+2)-(-2+2-2)}{-2} = \frac{0}{-2} = 0$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -2\\ 1 & -2 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}}=\frac{(2-2+4)-(2+2-4)}{-2}=\frac{4-0}{-2}=-2$$ †

2. Estudiar el sistema según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} x+ay+z=3a\\ x-y+z=2\\ ax+y=4a\end{array}\right\}$$

Resolverlo (si es posible) para a = 2.

(Septiembre 1997)

Solución:

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 1 & -1 & 1\\ a & 1 & 0\end{pmatrix}$, cuyo rango es al menos 2 pues existe un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1-(-1)=2$

Su determinante es:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ 1 & -1 & 1\\ a & 1 & 0\end{vmatrix}=(0+a^2+1)-(-a+0+1)=a^2+a=a(a+1)$$

$|A| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ó $a = -1$

Por tanto:

- Si $a \neq 0$ y $a \neq -1 \Rightarrow$ rango(A) = 3
- Si $a = 0 \Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ y rango(A) = 2
- Si $a = -1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ y también rango (A) = 2

La matriz ampliada es $B=\begin{pmatrix}1 & a & 1 & 3a\\ 1 & -1 & 1 & 2\\ a & 1 & 0 & 4a\end{pmatrix}$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq -1 \Rightarrow$ rango(A) = 3 = rango(B) $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.
- Si $a = 0 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ cuyo rango es 3 pues $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

  En este caso rango(B) = 3 $\neq$ rango(A) = 2 y el sistema es incompatible.
- Si $a = -1 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 3 pues

  $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (4+2+0)-(-3+4+0) = 6-1 = 5 \neq 0$$

  Por tanto rango(B) = 3 $\neq$ rango(A) = 2 y el sistema también es incompatible.

Si a = 2 el sistema es compatible determinado (solución única): $\left.\begin{array}{l} x+2y+z=6 \\ x-y+z=2 \\ 2x+y=8 \end{array}\right\}$.

En este caso $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0+4+1)-(-2+0+1) = 5-(-1) = 6$ (también se puede calcular en la expresión $|A| = a(a+1)$, haciendo a = 2)

Por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{(0+16+2)-(-8+0+6)}{6} = \frac{18-(-2)}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{(0+12+8)-(4+0+8)}{6} = \frac{20-12}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&2&6\\1&-1&2\\2&1&8\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2&1\\1&-1&1\\2&1&0\end{vmatrix}}=\frac{(-8+8+6)-(-12+16+2)}{6}=\frac{6-6}{6}=0 \ \dagger$$

3. Dados los planos $\alpha: x+y+z=1$, $\beta: ax+y=1$ y $\gamma: x+(a+1)z=0$, determinar los valores de a para los cuales:
1) los planos se cortan en un solo punto; 2) se cortan en una recta de puntos

(Junio 1999)

Solución:

Planteemos el sistema formado por los tres planos $\begin{cases}x+y+z=1\\ax+y=1\\x+(a+1)z=0\end{cases}$

La matriz de los coeficientes es: $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&1&0\\1&0&a+1\end{pmatrix}$, cuyo rango es al menos dos pues hay un menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=-1$.

El determinante de A es:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&1&0\\1&0&a+1\end{vmatrix}=(a+1+0+0)-(1+a(a+1)+0)=(a+1)-(1+a^2+a)=-a^2$$

$|A|=0 \Leftrightarrow -a^2=0 \Leftrightarrow a=0$

Por tanto:

- Si $a\neq 0 \Rightarrow$ rango(A) = 3
- Si $a=0 \Rightarrow A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ y rango(A) = 2

La matriz ampliada es $B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\a&1&0&1\\1&0&a+1&0\end{pmatrix}$

- Si $a\neq 0 \Rightarrow$ rango(A) = 3 = rango(B) $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado (solución única), y los tres planos se cortan en un punto.

ü Si a = 0 $\Rightarrow$ $B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$ cuyo rango es 2 pues todos los menores de orden tres son iguales a cero.

En este caso rango(B) = 2 = rango(A) y el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). Por tanto los tres planos se cortan en una recta de puntos. †

4. Discutir y resolver, según los diferentes valores del parámetro a, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases}x+y+(a+1)z=1\\ax=2\\ay+2z=0\end{cases}$$

(Septiembre 1999)

Solución:

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix}1&1&a+1\\a&0&0\\0&a&2\end{pmatrix}$ y su determinante es:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&a+1\\a&0&0\\0&a&2\end{vmatrix}=(0+0+a^3+a^2)-(0+2a+0)=a^3+a^2-2a=a(a^2+a-2)$$

Entonces $|A|=0 \Leftrightarrow a(a^2+a-2)=0 \Leftrightarrow a=0,\ a=1$ ó $a=-2$

Por tanto:

ü Si $a\neq 0$, $a\neq 1$ y $a\neq -2 \Rightarrow$ rango(A) = 3

ü Si a = 0 $\Rightarrow$ $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ y rango(A) = 2, pues hay al menos un menor de orden 2 distinto de cero.

ü Si a = 1 $\Rightarrow$ $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&0\\0&1&2\end{pmatrix}$ y rango(A) = 2, pues hay al menos un menor de orden 2 distinto de cero.

ü Si a = −2 $\Rightarrow$ $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&0&0\\0&-2&2\end{pmatrix}$ y rango(A) = 2, pues hay al menos un menor de orden 2 distinto de cero.

La matriz ampliada es $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & a+1 & 1\\ a & 0 & 0 & 2\\ 0 & a & 2 & 0\end{pmatrix}$

- Si $a \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -2 \Rightarrow$ rango(A) = 3 = rango(B) $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado (solución única).
- Si $a = 0 \Rightarrow B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$ cuyo rango es 3 pues hay un menor de orden 3 distinto de cero: $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix}=-4 \Rightarrow$ rango(B) = 3 ≠ 2 = rango (A) y el sistema es incompatible.
- Si $a = 1 \Rightarrow B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$ cuyo rango es 3 pues hay un menor de orden 3 distinto de cero: $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=1-2=-1 \Rightarrow$ rango(B) = 3 ≠ 2 = rango (A) y el sistema es incompatible.
- Si $a = 2 \Rightarrow B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 1\\ 3 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$ cuyo rango es 3 pues hay un menor de orden 3 distinto de cero: $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 0\end{vmatrix}=9-6=3 \Rightarrow$ rango(B) = 2 ≠ 3 = rango (A) y el sistema es incompatible.

Hallemos la solución para $a \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -2$. Recordemos que el determinante de A es $|A| = a(a^2+a-2) = a(a-1)(a+2)$ y apliquemos la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & a+1\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & a & 2\end{vmatrix}}{a(a-1)(a+2)}=\frac{2a(a+1)-4}{a(a-1)(a+2)}=\frac{2a^2+2a-4}{a(a-1)(a+2)}=\frac{2(a-1)(a+2)}{a(a-1)(a+2)}=\frac{2}{a}$$

(¡esto ya estaba claro!: no había nada más que ver la segunda ecuación del sistema).

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & a+1\\ a & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}}{a(a-1)(a+2)}=\frac{4-2a}{a(a-1)(a+2)}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\a&0&2\\0&a&0\end{vmatrix}}{a(a-1)(a+2)}=\frac{a^2-2a}{a(a-1)(a+2)}=\frac{a(a-2)}{a(a-1)(a+2)}=\frac{a-2}{(a-1)(a+2)}$$ †

5. Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones lineales según los diferentes valores del parámetro a, y resolverlo cuando sea posible: $\begin{cases}x-y=5\\y+z=a\\x-2z=3\\2x-3z=a\end{cases}$

(Junio 2000)

Solución:

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\1&0&-2\\2&0&-3\end{pmatrix}$ cuyo rango es 3 pues hay un menor de orden 3 distinto de cero: $\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\1&0&-2\end{vmatrix}=-2-1=-3$ **(*)**

La matriz ampliada es: $B=\begin{pmatrix}1&-1&0&5\\0&1&1&a\\1&0&-2&3\\2&0&-3&a\end{pmatrix}$.

Hagamos uso de las propiedades de los determinantes para calcular el determinante de la matriz B:

$$|B|=\begin{vmatrix}1&-1&0&5\\0&1&1&a\\1&0&-2&3\\2&0&-3&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&0&5\\1&0&1&a+5\\1&0&-2&3\\2&0&-3&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&a+5\\1&-2&3\\2&-3&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&a+5\\0&-3&-a-2\\0&-5&-a-10\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}-3&-a-2\\-5&-a-10\end{vmatrix}=(3a+30)-(5a+10)=-2a+20$$

Entonces $|B|=0\Leftrightarrow -2a+20=0\Leftrightarrow a=10$

Por tanto:

- Si $a\neq 10 \Rightarrow$ rango(B) = 4 ≠ rango(A) = 3 y el sistema es incompatible.
- Si $a = 10 \Rightarrow$ rango(B) = 3 = rango(A) y el sistema es compatible determinado.

Resolvamos el sistema en el caso a = 10: $\begin{cases} x-y=5 \\ y+z=10 \\ x-2z=3 \\ 2x-3z=10 \end{cases}$. Tomemos la tres primeras ecuaciones que forman un menor distinto de cero **(*)** y apliquemos la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 10 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{(-10-3+0)-(0+20+0)}{-3}=\frac{-33}{-3}=11$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 10 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{(-20+5+0)-(0+0+3)}{-3}=\frac{-18}{-3}=6$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{(3-10+0)-(5+0+0)}{-3}=\frac{-12}{-3}=4 \ \dagger$$

6. Estudiar la posición relativa de los planos $\alpha\equiv x+y=1$, $\beta\equiv ax+z=0$ y $\gamma\equiv x+y+z=2$, según los diferentes valores del parámetro a.

(Septiembre 2000)

Solución:

Planteemos el sistema formado por los tres planos $\begin{cases} x+y=1 \\ ax+z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$

La matriz de los coeficientes es: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es al menos dos pues hay un menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$.

El determinante de A es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0+1+0) - (0+a+1) = 1-(a+1) = -a$$

$|A| = 0 \Leftrightarrow -a = 0 \Leftrightarrow a = 0$

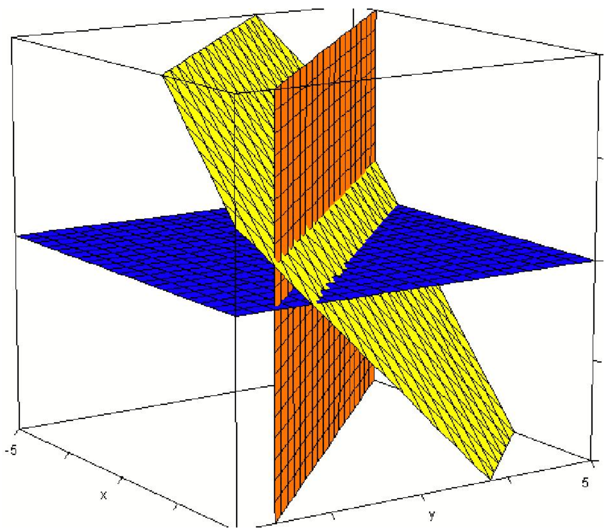
Por tanto:

- Si $a \neq 0 \Rightarrow$ rango(A) = 3
- Si $a = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y rango(A) = 2

La matriz ampliada es $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- Si $a \neq 0 \Rightarrow$ rango(A) = 3 = rango(B) $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado (solución única), y los tres planos se cortan en un punto.
- Si $a = 0 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ cuyo rango es 3 pues hay un menor de orden 3 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1 = 1$.

  En este caso rango(B) = 3 $\neq$ rango(A) = 2 y el sistema es incompatible (no tiene solución). Por tanto los tres planos no tienen ningún punto en común. Sin embargo sí se cortan dos a dos en una recta formando entre los tres un prisma triangular. †



7. Discute y resuelve (en los casos que sea posible) el siguiente sistema: $\begin{cases} ax+y-z=1 \\ x+2y+z=2 \\ x+3y-z=0 \end{cases}$

(Junio 2001)

Solución:

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es al menos dos pues hay un menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1-(-2)=3$

Calculemos el determinante de A:

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=(-2a+1-3)-(-2-1+3a)=-5a+1$$

$$|A|=0 \Leftrightarrow -5a+1=0 \Leftrightarrow a=\frac{1}{5}$$

Por tanto:

- Si $a\neq\frac{1}{5} \Rightarrow$ rango(A) = 3
- Si $a=\frac{1}{5} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1/5 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ y rango(A) = 2

La matriz ampliada es $B=\begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- Si $a\neq\frac{1}{5} \Rightarrow$ rango(B) = 3 = rango(A) $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado (solución única).
- Si $a=\frac{1}{5} \Rightarrow B=\begin{pmatrix} 1/5 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ cuyo rango es 3 pues hay un menor de orden 3 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}=(0-6-2)-(3+0-2)=-8-1=-9 \Rightarrow$
  $\Rightarrow$ rango(B) = 3 $\neq$ 2 = rango (A) y el sistema es incompatible.

Resolvamos el sistema en el caso $a \neq \frac{1}{5}$. Recordemos que $|A| = -5a+1$ y apliquemos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{-5a+1} = \frac{(-2+0-6)-(0-2+3)}{-5a+1} = \frac{-8-1}{-5a+1} = \frac{-9}{-5a+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-5a+1} = \frac{(-2a+1+0)-(-2-1+0)}{-5a+1} = \frac{-2a+4}{-5a+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{-5a+1} = \frac{(0+2+3)-(2+0+6a)}{-5a+1} = \frac{3-6a}{-5a+1}$$ †

8. Clasifica el sistema según los valores de m y resuelve cuando m = −1,

$$\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ 2x+5y+4z=-1 \\ x+3y+m^2z=3m \end{cases}$$

(Septiembre 2001)

Solución:

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & m^2 \end{pmatrix}$, cuyo rango es al menos dos pues hay un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5-4=1$

El determinante de A es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & m^2 \end{vmatrix} = \left(5m^2+8+18\right)-\left(15+4m^2+12\right) = m^2-1$$

$|A| = 0 \Leftrightarrow m^2-1=0 \Leftrightarrow m = 1$ ó $m = -1$

Por tanto:

- Si $m \neq 1$ y $m \neq -1 \Rightarrow$ rango(A) = 3

- Si $m = 1$ ó $m = -1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y rango(A) = 2

La matriz ampliada es $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & m^2 & 3m \end{pmatrix}$

- Si $m \neq 1$ y $m \neq -1 \Rightarrow$ rango(B) = 3 = rango(A) $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado (solución única).

- Si $m = 1 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ cuyo rango es 3 pues hay un menor de orden 3 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (15 - 2 + 12) - (10 + 12 - 3) = 6 \Rightarrow$

  $\Rightarrow$ rango(B) = 3 ≠ 2 = rango (A) y el sistema es incompatible.

- Si $m = -1 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ cuyo rango es dos pues todos los menores de orden tres son iguales a cero (¡compruébalo!).

  También se puede calcular el rango por el método de Gauss:

  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3 - f_1]{f_2 - 2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 - f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$ luego rango (B) = 2. Incluso se puede deducir que el rango es 2, observando que la tercera fila resulta de restar la segunda menos la primera.

  En este caso tenemos pues rango(B) = 2 = rango(A) < 3 = nº de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible indeterminado.

  Resolvámoslo. Nos quedamos con las dos primeras ecuaciones, tomamos la incógnita z como un parámetro, $z = \lambda$, y lo pasamos al segundo miembro:

  $$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 5y + 4z = -1 \end{cases} \xrightarrow{z=\lambda} \begin{cases} x + 2y + 3\lambda = 2 \\ 2x + 5y + 4\lambda = -1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x + 2y = 2 - 3\lambda \\ 2x + 5y = -1 - 4\lambda \end{cases}$$

  Resolvemos ahora por la regla de Cramer:

  $$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 - 3\lambda & 2 \\ -1 - 4\lambda & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{(10 - 15\lambda) - (-2 - 8\lambda)}{1} = -7\lambda + 12$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2-3\lambda\\ 2 & -1-4\lambda\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}}=\frac{(-1-4\lambda)-(4-6\lambda)}{1}=2\lambda-5$$

Resumiendo: $x = -7\lambda + 12$, $y = 2\lambda - 5$, $z = \lambda$ †

9. Discute según los valores del parámetro a el sistema $\begin{cases} ax+y+z=0\\ x+ay+z=1\\ x+y+az=1\end{cases}$

¿Para qué valores de a se puede aplicar la regla de Cramer para resolver el sistema?

(Junio 2002)

Solución:

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$, cuyo determinante es:

$$|A|=\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=(a^3+1+1)-(a+a+a)=a^3-3a+2=(a+2)(a-1)^2$$

$|A|=0 \Leftrightarrow (a+2)(a-1)^2=0 \Leftrightarrow a=-2$ ó $a=1$

Por tanto:

- Si $a\neq -2$ y $a\neq 1 \Rightarrow \text{rango}(A)=3$
- Si $a=-2 \Rightarrow A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ y rango(A) = 2 pues hay un menor de orden 2 distinto de 0: $\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=4-1=3$
- Si $a=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y rango(A) = 1 pues claramente todos los menores de orden dos son iguales a cero.

La matriz ampliada es $B=\begin{pmatrix}a & 1 & 1 & 0\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\end{pmatrix}$

- Si $a\neq -2$ y $a\neq 1 \Rightarrow \text{rango}(A)=3=\text{rango}(B) \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado (solución única).

- Si $a = -2 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ cuyo rango es 3 pues hay un menor de orden 3 distinto de cero: $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (4+1+0)-(0+1-2) = 5-(-1) = 6$

  $\Rightarrow$ rango(B) = 3 ≠ 2 = rango (A) y el sistema es incompatible.

- Si $a = 1 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ cuyo rango es 2 (hay dos filas iguales).

  Entonces rango(B) = 2 ≠ rango (A) = 1, y el sistema es incompatible.

Los valores de a para los que se puede aplicar la regla de Cramer son los valores de a para los que el sistema es compatible a ≠ −2 y a ≠ 1 (en este caso determinado). Hallemos las soluciones (recordemos que el determinante de A es $(a+2)(a-1)^2$).

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(1+1)-(a+a)}{(a+2)(a-1)^2} = \frac{-2a+2}{(a+2)(a-1)^2} = \frac{-2(a-1)}{(a+2)(a-1)^2} = \frac{-2}{(a+2)(a-1)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(a^2+1)-(1+a)}{(a+2)(a-1)^2} = \frac{a^2-a}{(a+2)(a-1)^2} = \frac{a(a-1)}{(a+2)(a-1)^2} = \frac{a}{(a+2)(a-1)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(a^2+1)-(1+a)}{(a+2)(a-1)^2} = \frac{a^2-a}{(a+2)(a-1)^2} = \frac{a(a-1)}{(a+2)(a-1)^2} = \frac{a}{(a+2)(a-1)}$$ †

10. Hallar el valor del parámetro k para que el sistema $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+z=5 \\ 4x+5y+3z=k \end{cases}$ sea compatible indeterminado. Calcula la solución general y verifica si las ternas (1, 1, 0), (−5, 4, 3) y (1, 2, −1) son soluciones particulares.

(Septiembre 2002)

Solución:

La matriz de los coeficientes, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, no puede tener rango 3 pues la tercera fila es combinación de las dos primeras (la tercera fila es la primera multiplicada por 2 más la segunda). Así pues su rango será dos (es obvio que hay al menos un menor de orden dos distinto de cero).

Por tanto el sistema será compatible indeterminado cuando el rango de la matriz ampliada también sea 2: rango(A) = rango(B) = 2 < 3 = nº de incógnitas.

Hallemos pues el valor de k para que el rango de la matriz ampliada sea dos. Lo haremos por el método de Gauss:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & k \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3-4f_1]{f_2-2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & k-8 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3-f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-9 \end{pmatrix}$$

De aquí se deduce que:

- Si $k = 9 \Rightarrow$ rango(B) = 2
- Si $k \neq 9 \Rightarrow$ rango(B) = 3

Por tanto el valor del parámetro para el cual el sistema es compatible indeterminado es k = 9.

Hallemos la solución general. Eliminamos la tercera ecuación, llamamos z = λ y pasamos el parámetro al segundo miembro: $\begin{cases} x+y+\lambda=2 \\ 2x+3y+\lambda=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=2-\lambda \\ 2x+3y=5-\lambda \end{cases}$.

Aplicamos a hora la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 5-\lambda & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{6-3\lambda-(5-\lambda)}{1}=-2\lambda+1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{5-\lambda-(4-2\lambda)}{1}=\lambda+1$$

Resumiendo: x = −2λ + 1, y = λ +1, z = λ †

11. Estudia, según los valores de a, la compatibilidad del sistema: $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=-2 \end{cases}$.

Resuélvelo para el valor de a que lo haga compatible indeterminado.

(Septiembre 2003)

Solución:

Es muy parecido al ejercicio 9:

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, cuyo determinante es:

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a^3+1+1)-(a+a+a)=a^3-3a+2=(a+2)(a-1)^2$$

$|A|=0 \Leftrightarrow (a+2)(a-1)^2=0 \Leftrightarrow a=-2$ ó $a=1$

Por tanto:

- Si $a \neq -2$ y $a \neq 1 \Rightarrow$ rango(A) = 3
- Si $a=-2 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y rango(A) = 2 pues hay un menor de orden 2 distinto de 0: $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=4-1=3$
- Si $a=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y rango(A) = 1 pues claramente todos los menores de orden dos son iguales a cero.

La matriz ampliada es $B=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{pmatrix}$

- Si $a \neq -2$ y $a \neq 1 \Rightarrow$ rango(A) = 3 = rango(B) $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado (solución única).
- Si $a=-2 \Rightarrow B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ cuyo rango es 2 pues todos los menores de orden 3 son iguales a cero $\Rightarrow$ rango(B) = 2 = rango (A) < 3 = número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones).

ü Si a = 1 $\Rightarrow$ $B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&-2\end{pmatrix}$ cuyo rango es 2 (hay dos filas iguales). Entonces rango(B) = 2 $\neq$ rango (A) = 1, y el sistema es incompatible.

El valor de a para el que el sistema es compatible indeterminado es a = −2. Para resolverlo en este caso eliminamos la última fila, llamamos z = λ, pasamos este parámetro al segundo miembro y aplicamos la regla de Cramer:

$$\begin{cases}-2x+y+\lambda=1\\x-2y+\lambda=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x+y=1-\lambda\\x-2y=1-\lambda\end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\1-\lambda&-2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-2&1\\1&-2\end{vmatrix}}=\frac{-2+2\lambda-(1-\lambda)}{3}=\frac{3\lambda-3}{3}=\lambda-1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}-2&1-\lambda\\1&1-\lambda\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-2&1\\1&-2\end{vmatrix}}=\frac{-2+2\lambda-(1-\lambda)}{3}=\frac{3\lambda-3}{3}=\lambda-1$$

Resumiendo: x = λ − 1 , y = λ − 1 , z = λ †

12. Se considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases}(m+2)x+(m-1)y-z=3\\mx-y+z=2\\x+my-z=0\end{cases}$

a) Discútelo para los distintos valores de m.

b) Resuélvelo para m = 1.

(Junio 2004)

Solución:

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix}m+2&m-1&-1\\m&-1&1\\1&m&-1\end{pmatrix}$. El determinante de A es

$$|A|=\begin{vmatrix}m+2&m-1&-1\\m&-1&1\\1&m&-1\end{vmatrix}=(m+2+m-1-m^2)-(1-m^2+m+m^2+2m)=$$

$=-m^2-m=-m(m+1)$. Entonces $|A|=0 \Leftrightarrow m=0$ ó $m=-1$

ü Si $m\neq 0$ y $m\neq -1\Rightarrow$ rango(A) = 3

- Si m = 0, $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rango(A) = 2

- Si m = −1, $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rango(A) = 2

La matriz ampliada es $B=\begin{pmatrix} m+2 & m-1 & -1 & 3 \\ m & -1 & 1 & 2 \\ 1 & m & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- Si m ≠ 0 y m ≠ −1 ⇒ rango(A) = 3 = rango(B) ⇒ el sistema es compatible determinado (solución única).

- Si m = 0, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 3 pues hay un menor de orden 3 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2-(-3)=1$. Entonces rango(B) = 3 ≠ rango(A) = 2 y el sistema es incompatible.

- Si m = −1, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 3 pues hay un menor de orden 3 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2-(-6)=4$

  (para calcular este determinante se le ha sumado a la 2ª columna la 1ª y luego se ha desarrollado por los elementos de la 3ª fila).

  Entonces rango(B) = 3 ≠ rango(A) = 2 y el sistema es incompatible.

Para m = 1, el sistema es $\begin{cases} 3x-z=3 \\ x-y+z=2 \\ x+y-z=0 \end{cases}$, $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $|A| = -2$. Entonces, por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{(3-2)-3}{-2} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{(-6+3)-(-2-3)}{-2} = \frac{-3+5}{-2} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{3-(-3+6)}{-2} = \frac{0}{-2} = 0 \quad \dagger$$

13. Dado el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro a: $\begin{cases} x+2y+z=a \\ x+y-az=a \\ 2x+3y+z=a \end{cases}$, se pide:

a) Discusión del mismo en función del valor del parámetro a.

b) Resolución en el caso de que $a \neq 0$.

(Junio 2005)

Solución:

14. a) Discute, en función de los valores de m, el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x-3y=0 \\ x-y+z=0 \\ x+2y+mz=m \end{cases}$

b) Resuelve, en los casos de compatibilidad, el sistema anterior.

(Septiembre 2003)

Solución:

15. A un compañero le piden que clasifique y resuelva el sistema $\begin{cases} 3x-ky=3 \\ y+3z=6 \\ x+kz=5 \end{cases}$ para el valor del parámetro $k \in \mathbb{R}$ que él desee. Obtiene, correctamente para dicho valor, que el sistema es compatible indeterminado, y que una expresión de las soluciones en forma paramétrica es x = 1 + 2t, y = …, z = … Determina para qué valor del parámetro k ha clasificado y resuelto el sistema, y calcula las expresiones de las incógnitas "y" y "z" que le faltan.

(Junio 2006)

Solución:

16. Clasifica en función del parámetro $a \in$ ¡ el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} ax - 3y - 2z = 0 \\ -x + (5+a)z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$ y resuélvelo, si es posible, para $a = -4$.

(Septiembre 2006)

Solución:

17. Discute y resuelve, en función del parámetro $a \in$ ¡ , el sistema $\begin{cases} ax + y = 0 \\ -y + 2az = 0 \\ -x + ay = 0 \end{cases}$

(Junio 2007)

Solución:

18. Enuncia el Teorema de Rouché-Fröbenius. Contesta razonadamente a las siguientes preguntas para un sistema $A \cdot X = B$ en forma matricial:
a) ¿Puede un sistema homogéneo ser incompatible?
b) Si la matriz A es de orden 2×3, ¿puede ser el sistema $A \cdot X = B$ compatible determinado?

(Septiembre 2007)

Solución:

19. Encuentra, si es posible, un valor del parámetro $a \in$ ¡ de modo que el sistema $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ 2x + z = a \end{cases}$
a) Sea compatible determinado.
b) Sea compatible indeterminado.
c) Sea incompatible.

(Junio 2008)

Solución:

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo determinante es $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1+4+0)-(2+1+0) = 3-3 = 0$. Por tanto rango(A) = 2 (hay al menos un menor de orden 2 distinto de cero). Esto quiere decir que el sistema no puede ser compatible determinado.

La matriz ampliada es $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 1 & a\end{pmatrix}$. Hallemos su rango utilizando el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 1 & a\end{pmatrix}\xrightarrow[f_3-2f_1]{f_2-f_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 3 & 1\\ 0 & -2 & 3 & a-2\end{pmatrix}\xrightarrow{f_3-f_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & a-3\end{pmatrix}$$

Por tanto: $\text{rango}(B)=\begin{cases}2 & \text{si} \quad a=3\\ 3 & \text{si} \quad a\neq 3\end{cases}$

Resumiendo:

- Si $a = 3 \Rightarrow$ rango(A) = rango(B) = 2 $\Rightarrow$ sistema compatible indeterminado.
- Si $a \neq 3 \Rightarrow$ rango(A) = 2 $\neq$ rango(B) = 3 $\Rightarrow$ sistema incompatible.
- El sistema nunca puede ser compatible determinado, sea quien sea $a \in \mathbb{R}$. †

20. Clasifica el sistema $\begin{cases}x-2y+az=0\\ -ay+2z=0\\ 2x-y+(a+1)z=0\\ x+y+z=0\end{cases}$ en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, y resuélvelo para $a = -2$

(Septiembre 2008)

Solución: