Determinantes

1. Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ \frac{x}{3} & \frac{y}{3} & \frac{z}{3} \end{vmatrix}$

(Junio 2002)

Solución:

Utilicemos las propiedades de los determinantes para transforma el determinante en otro que dependa del determinante conocido:

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = -\left(-\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}$. En estos dos pasos hemos permutado la fila 1 por la fila 3 (el determinante cambia de signo), y luego la fila 2 por la fila 3 (el determinante vuelve a cambiar de signo).

$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}$. Aquí se ha utilizado que si multiplicamos por el mismo número todos los elementos de una misma línea (fila o columna) el determinante queda multiplicado por ese número (obsérvese que todos los elementos de la primera fila están multiplicados por 3).

Por tanto $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 = 15$

b) $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ \frac{x}{3} & \frac{y}{3} & \frac{z}{3} \end{vmatrix} = 5 \cdot \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{5}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ x & y & z \end{vmatrix}$ (observar que la primera fila está multiplicada por 5 y la tercera por 1/3)

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}$. El primer determinante se puede poner como suma de otros dos que tienen la primera y tercera filas iguales (comunes) y en la segunda fila cada uno de los sumandos de la segunda fila del primer determinante. Además, el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix}$ es 0 porque la segunda fila es el doble que la primera (recuerda: si una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas proporcionales, su determinante es cero).

Por tanto: $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ \frac{x}{3} & \frac{y}{3} & \frac{z}{3} \end{vmatrix} = \frac{5}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{5}{3}\cdot 5 = \frac{25}{3}$ †

2. Utiliza las propiedades de los determinantes para desarrollar el siguiente:

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix}$$

Enuncia las propiedades que has utilizado.

(Junio 2003)

Solución:

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 2x & 3x+2 \\ x & 2x & 3x+4 \\ x & 2x & 3x+6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 3x+2 \\ x & 3 & 3x+4 \\ x & 5 & 3x+6 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} x & 2x & 3x \\ x & 2x & 3x \\ x & 2x & 3x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 2x & 2 \\ x & 2x & 4 \\ x & 2x & 6 \end{vmatrix} \right) +$$

$$+\left(\begin{vmatrix} x & 1 & 3x \\ x & 3 & 3x \\ x & 5 & 3x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 3 & 4 \\ x & 5 & 6 \end{vmatrix} \right) \mathbf{(*)}$$

Hasta aquí se ha utilizado la siguiente propiedad (suma de determinantes):

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ (esta descomposición es válida cualesquiera que sean la fila o la columna en la que se hallen los sumandos).

Analicemos ahora cada uno de los determinantes que aparecen en **(*)**:

$\begin{vmatrix} x & 2x & 3x \\ x & 2x & 3x \\ x & 2x & 3x \end{vmatrix} = 0$, porque las columnas son proporcionales.

$\begin{vmatrix} x & 2x & 2 \\ x & 2x & 4 \\ x & 2x & 6 \end{vmatrix} = 0$, porque la primera y segunda columnas son proporcionales.

$\begin{vmatrix} x & 1 & 3x \\ x & 3 & 3x \\ x & 5 & 3x \end{vmatrix} = 0$, porque la primera y tercera columnas son proporcionales.

$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 3 & 4 \\ x & 5 & 6 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = x \cdot 0 = 0$. En la primera igualdad se ha utilizado que si multiplicamos por el mismo número todos los elementos de una misma línea (en este caso la primera columna), el determinante queda multiplicado por ese número. En la segunda igualdad se ha utilizado que si una línea es combinación lineal de las demás paralelas, entonces su determinante es cero (en este caso la tercera columna es suma de las dos primeras)

Por tanto $\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix} = 0$ †

3. Si la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ tiene su determinante igual a n, averigua, utilizando las propiedades de los determinantes, el valor del determinante de las matrices siguientes:

$B = \begin{pmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{pmatrix}$

(Junio 2005)

Solución:

$|B| = \begin{vmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9a & 6b & 3c \\ 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \end{vmatrix} =$ [intercambiando la primera y tercera filas y luego la segunda y tercera filas hay dos cambios de signo $\Rightarrow$ el determinante que resulta tiene el mismo signo que el primero] $= 3 \cdot 2 \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$ [la primera columna está multiplicada por 3 y la segunda columna está multiplicada por 2] $= 6 \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6 \cdot 3 \cdot 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 36n$ [la primera fila está multiplicada por 3 y la segunda fila está multiplicada por 2; además el determinante que queda es, según el enunciado, igual a n].

$$|C|=\begin{vmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} d & e & f+e \\ a & b & c+b \\ g & h & i+h \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f & e & f+e \\ c & b & c+b \\ i & h & i+h \end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} d & e & e \\ a & b & b \\ g & h & h \end{vmatrix}\right)+$$

$$\left(\begin{vmatrix} f & e & f \\ c & b & c \\ i & h & i \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f & e & e \\ c & b & b \\ i & h & h \end{vmatrix}\right) \textbf{(*)}$$

En este paso hemos ha utilizado la suma de determinantes:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ (y esta descomposición es válida cualesquiera que sean la fila o la columna en la que se hallen los sumandos).

Estudiemos ahora cada uno de los cuatro determinantes de **(*)**:

$$\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=-n$$ (intercambiando la primera y segunda filas)

$$\begin{vmatrix} d & e & e \\ a & b & b \\ g & h & h \end{vmatrix}=0$$ (la segunda y tercera columnas son iguales)

$$\begin{vmatrix} f & e & f \\ c & b & c \\ i & h & i \end{vmatrix}=0$$ (la primera y tercera columnas son iguales)

$$\begin{vmatrix} f & e & e \\ c & b & b \\ i & h & h \end{vmatrix}=0$$ (la segunda y tercera columnas son iguales)

Por tanto $|C|=\begin{vmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{vmatrix}=-n$ †

4. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=x$, y que $\begin{vmatrix} 3b & 6c & 6a \\ e & 2f & 2d \\ 5h & 10i & 10g \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a+2b & b-c & 7c \\ d+2e & e-f & 7f \\ g+2h & h-i & 7i \end{vmatrix}=50x+6$, halla el valor de x. (Nota: expresa los determinantes de la segunda igualdad en función de x).

(Septiembre 2006)

Solución:

$\begin{vmatrix} 3b & 6c & 6a \\ e & 2f & 2d \\ 5h & 10i & 10g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6a & 3b & 6c \\ 2d & e & 2f \\ 10g & 5h & 10i \end{vmatrix} =$ [intercambiando la primera y tercera columnas y luego la segunda y tercera columnas hay dos cambios de signo $\Rightarrow$ el determinante que resulta tiene el mismo signo que el primero] $= 4\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ d & e & f \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix} =$ [la primera y tercera columnas están ambas multiplicadas por 2] $= 4\cdot 3\cdot 5\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 60x$ [la primera fila está multiplicada por 3 y la tercera fila está multiplicada por 5; además el determinante que queda es, según el enunciado, igual a x]

$\begin{vmatrix} a+2b & b-c & 7c \\ d+2e & e-f & 7f \\ g+2h & h-i & 7i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b-c & 7c \\ d & e-f & 7f \\ g & h-i & 7i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & b-c & 7c \\ 2e & e-f & 7f \\ 2h & h-i & 7i \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a & b & 7c \\ d & e & 7f \\ g & h & 7i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c & 7c \\ d & f & 7f \\ g & i & 7i \end{vmatrix} \right) +$

$+ \left(\begin{vmatrix} 2b & b & 7c \\ 2e & e & 7f \\ 2h & h & 7i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2b & c & 7c \\ 2e & f & 7f \\ 2h & i & 7i \end{vmatrix} \right)$ [por la propiedad de la suma de determinantes (véanse los ejercicios 2 y 3)]

Pero:

$\begin{vmatrix} a & b & 7c \\ d & e & 7f \\ g & h & 7i \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7x$ (la tercera columna está multiplicada por 7)

$\begin{vmatrix} a & c & 7c \\ d & f & 7f \\ g & i & 7i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2b & b & 7c \\ 2e & e & 7f \\ 2h & h & 7i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2b & c & 7c \\ 2e & f & 7f \\ 2h & i & 7i \end{vmatrix} = 0$ (tienen columnas proporcionales)

Entonces $\begin{vmatrix} a+2b & b-c & 7c \\ d+2e & e-f & 7f \\ g+2h & h-i & 7i \end{vmatrix} = 7x$

Por tanto $\begin{vmatrix} 3b & 6c & 6a \\ e & 2f & 2d \\ 5h & 10i & 10g \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a+2b & b-c & 7c \\ d+2e & e-f & 7f \\ g+2h & h-i & 7i \end{vmatrix} = 50x+6 \Leftrightarrow 60x + 7x = 50x + 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 17x = 6 \Leftrightarrow x = \dfrac{6}{17}$ †

5. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 7 & 1 \end{vmatrix} = 6$, calcula el valor de $\begin{vmatrix} z/2 & z+7 & 3 \\ y/2 & y & 3 \\ x/2 & x-3 & 3 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} x & -3 & 1 & 2 \\ y & 0 & 1 & 2 \\ z & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

(Septiembre 2008)

Solución:

$$\begin{vmatrix} z/2 & z+7 & 3 \\ y/2 & y & 3 \\ x/2 & x-3 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot 3 \begin{vmatrix} z & z+7 & 1 \\ y & y & 1 \\ x & x-3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}\left(\begin{vmatrix} z & z & 1 \\ y & y & 1 \\ x & x & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & 7 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ x & -3 & 1 \end{vmatrix} \right) =$$

$\frac{3}{2}\left(-\begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 7 & 1 \end{vmatrix} \right) = \frac{3}{2}(-6) = -9$ (se han utilizado propiedades de los determinantes ya comentadas en los ejercicios anteriores).

Para calcular el valor del determinante $\begin{vmatrix} x & -3 & 1 & 2 \\ y & 0 & 1 & 2 \\ z & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, desarrollaremos por los elementos de la última fila:

$$\begin{vmatrix} x & -3 & 1 & 2 \\ y & 0 & 1 & 2 \\ z & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 1 & 2 \\ z & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 7 & 1 \end{vmatrix} = 6\cdot 0 + 2\cdot 6 = 12 \dagger$$