
 <p>I.E.S. "Fernando de Mena" Secuñillanos (Ciudad Real)</p>	<p>PRUEBA EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE MATEMÁTICAS opción B</p>	<p>4º E.S.O. CURSO 2008-2009</p>	 <p>Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha Consejo de Educación y Ciencia</p>
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

1. Calcular, simplificando los pasos intermedios y el resultado:

$$\text{a) } \frac{\left(\frac{1}{5} + 2 - \frac{1}{3}\right) \div \frac{1}{5} + \frac{3}{2}}{\frac{1}{5} + \left(2 - \frac{1}{3} \div \frac{1}{5}\right) \frac{3}{2}} =$$

$$\text{b) } \frac{(2^2)^2 \cdot 2^{-2} \cdot (3^2)^3 \cdot 3 \cdot (3^2)^{-2}}{12 \cdot 3^3 \cdot 2^{-1} \cdot 3^{-3}} =$$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\left(\frac{1}{5} + 2 - \frac{1}{3}\right) \div \frac{1}{5} + \frac{3}{2}}{\frac{1}{5} + \left(2 - \frac{1}{3} \div \frac{1}{5}\right) \frac{3}{2}} &= \frac{\left(\frac{3}{15} + \frac{30}{15} - \frac{5}{15}\right) \div \frac{1}{5} + \frac{3}{2}}{\frac{1}{5} + \left(2 - \frac{5}{3}\right) \frac{3}{2}} = \frac{\frac{28}{15} \div \frac{1}{5} + \frac{3}{2}}{\frac{1}{5} + \left(\frac{6}{3} - \frac{5}{3}\right) \frac{3}{2}} = \frac{\frac{140}{15} + \frac{3}{2}}{\frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 2}} = \\ &= \frac{\frac{28}{3} + \frac{3}{2}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}} = \frac{\frac{56}{6} + \frac{9}{6}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}} = \frac{\frac{65}{6}}{\frac{2}{10} + \frac{5}{10}} = \frac{\frac{65}{6}}{\frac{7}{10}} = \frac{650}{42} = \frac{325}{21} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{(2^2)^2 \cdot 2^{-2} \cdot (3^2)^3 \cdot 3 \cdot (3^2)^{-2}}{12 \cdot 3^3 \cdot 2^{-1} \cdot 3^{-3}} = \frac{2^4 \cdot 2^{-2} \cdot 3^6 \cdot 3 \cdot 3^{-4}}{2^2 \cdot 3 \cdot 3^3 \cdot 2^{-1} \cdot 3^{-3}} = \frac{2^2 \cdot 3^3}{2 \cdot 3} = 2 \cdot 3^2 = 18$$

2. Calcular, simplificando los pasos intermedios y el resultado:

$$\text{a) } \sqrt{\sqrt{3} \sqrt[3]{3} \sqrt{27}} =$$

$$\text{b) } -2\sqrt{27} + 4\sqrt{12} - \sqrt{300} + \sqrt{75} =$$

$$\text{c) } \text{Racionalizar y simplificar: } \frac{3\sqrt{2} - 4}{3\sqrt{2} + 4} =$$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{\sqrt{3} \sqrt[3]{3} \sqrt{27}} &= \sqrt{\sqrt{3} \sqrt[3]{3} \sqrt{3^3}} = \sqrt{\sqrt{3} \sqrt[3]{3} \sqrt{3^2 \cdot 3}} = \sqrt{\sqrt{3} \sqrt[3]{3} \sqrt{3^5}} = \sqrt{\sqrt{3} \sqrt[6]{3^5}} = \\ &= \sqrt{\sqrt[6]{3^3} \sqrt[6]{3^5}} = \sqrt{\sqrt[6]{3^8}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } -2\sqrt{27} + 4\sqrt{12} - \sqrt{300} + \sqrt{75} &= -2\sqrt{3^3} + 4\sqrt{2^2 \cdot 3} - \sqrt{3 \cdot 2^2 \cdot 5^2} + \sqrt{3 \cdot 5^2} = \\ &= -2 \cdot 3\sqrt{3} + 4 \cdot 2\sqrt{3} - 2 \cdot 5\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = -6\sqrt{3} + 8\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = \\ &= (-6 + 8 - 10 + 5)\sqrt{3} = -3\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{3\sqrt{2}-4}{3\sqrt{2}+4} &= \frac{(3\sqrt{2}-4)(3\sqrt{2}-4)}{(3\sqrt{2}+4)(3\sqrt{2}-4)} = \frac{(3\sqrt{2}-4)^2}{(3\sqrt{2})^2-4^2} = \frac{(3\sqrt{2})^2-2\cdot 3\sqrt{2}\cdot 4+4^2}{9\cdot 2-16} = \\ &= \frac{9\cdot 2-24\sqrt{2}+16}{18-16} = \frac{18-24\sqrt{2}+16}{2} = \frac{34-24\sqrt{2}}{2} = \frac{34}{2} - \frac{24\sqrt{2}}{2} = 17-12\sqrt{2} \end{aligned}$$

3. Resolver:

a) $(x^2 - x)(x^2 + x) = (x-2)^2 + x(x+4)$

b) $x + \sqrt{5x+10} = 8$ (comprobar la solución)

Solución:

a) $(x^2 - x)(x^2 + x) = (x-2)^2 + x(x+4) \Rightarrow x^4 - x^2 = x^2 - 4x + 4 + x^2 + 4x \Rightarrow$

$\Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$. Llamando $x^2 = z$, tenemos la ecuación $z^2 - 3z - 4 = 0$, cuyas soluciones son:

$$z_1 = \frac{3 + \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 + \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 + \sqrt{25}}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$$

$$z_2 = \frac{3 - \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 - \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 - \sqrt{25}}{2} = \frac{3-5}{2} = -1$$

Si $z=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x_1=2, x_2=-2$.

Si $z=-1 \Rightarrow x^2=-1$, que no tiene solución real.

b) $x + \sqrt{5x+10} = 8 \Rightarrow \sqrt{5x+10} = 8 - x \Rightarrow (\sqrt{5x+10})^2 = (8-x)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 5x+10 = 64 - 16x + x^2 \Rightarrow x^2 - 21x + 54 = 0$$

$$x_1 = \frac{21 + \sqrt{21^2 - 4 \cdot 1 \cdot 54}}{2 \cdot 1} = \frac{21 + \sqrt{441 - 216}}{2} = \frac{21 + \sqrt{225}}{2} = \frac{21+15}{2} = 18$$

$$x_2 = \frac{21 - \sqrt{21^2 - 4 \cdot 1 \cdot 54}}{2 \cdot 1} = \frac{21 - \sqrt{441 - 216}}{2} = \frac{21 - \sqrt{225}}{2} = \frac{21-15}{2} = 3$$

Comprobemos la solución $x_1=18$:

$$x + \sqrt{5x+10} = 18 + \sqrt{5 \cdot 18 + 10} = 18 + \sqrt{90+10} = 18 + \sqrt{100} = 18 + 10 = 28$$

Entonces $x_1=18$ no se puede tomar como solución de la ecuación.

Comprobemos la solución $x_2=3$:

$$x + \sqrt{5x+10} = 3 + \sqrt{5 \cdot 3 + 10} = 3 + \sqrt{15+10} = 3 + \sqrt{25} = 3 + 5 = 8$$

Por tanto la única solución de la ecuación es $x=3$.

4. a) Factorizar: $x^4 - x^3 - 16x^2 - 20x$

b) Efectuar, simplificando el resultado: $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} - \frac{12}{x^2-4} =$

Solución:

a) Como el término independiente es 0, sacamos x factor común:

$$x^4 - x^3 - 16x^2 - 20x = x(x^3 - x^2 - 16x - 20)$$

Ahora factorizamos el polinomio $x^3 - x^2 - 16x - 20$ utilizando la regla de Ruffini:

	1	-1	-16	-20
-2		-2	6	20
	1	-3	-10	0
-2		-2	10	
	1	-5	0	
5		5		
	1	0		

Por tanto $x^4 - x^3 - 16x^2 - 20x = x(x^3 - x^2 - 16x - 20) = x(x+2)^2(x-5)$

b) Hallemos el mínimo común múltiplo de los denominadores:

$x-2$, $x+2$ ya están factorizados (son de primer grado y de coeficiente líder 1);
 $x^2-4 = (x+2)(x-2)$. Por tanto: $mcm[x-2, x+2, x^2-4] = (x+2)(x-2)$.

Así pues:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} - \frac{12}{x^2-4} &= \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{(x-2)^2}{(x+2)(x-2)} - \frac{12}{(x+2)(x-2)} = \\ &= \frac{x^2+3x+2}{(x+2)(x-2)} + \frac{x^2-4x+4}{(x+2)(x-2)} - \frac{12}{(x+2)(x-2)} = \frac{2x^2-x-6}{(x+2)(x-2)} = \\ &= \frac{(x-2)(2x+3)}{(x+2)(x-2)} = \frac{2x+3}{x+2} \end{aligned}$$

Se ha utilizado que $2x^2 - x + 6 = (x-2)(2x+3)$ pues, por la regla de Ruffini:

	2	-1	6
2		4	6
	2	3	0

5. Resolver y representar la solución en la recta \mathbb{R} :

a) $(3x+1)(3x-1) - 6 < (2x-3)^2 + x^2$

b)
$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{2} - \frac{6-x}{4} < x+1 \\ 3 - \frac{5x-1}{10} \geq \frac{x-1}{5} - \frac{x-3}{2} \end{array} \right\}$$

Solución:

a) $(3x+1)(3x-1) - 6 < (2x-3)^2 + x^2 \Rightarrow 9x^2 - 1 - 6 < 4x^2 - 12x + 9 + x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 + 12x - 16 < 0.$

Dividiendo todos los términos entre 4 (no cambia el sentido de la desigualdad pues $4 > 0$) tenemos la inecuación:

$x^2 + 3x - 4 < 0$

Las raíces del polinomio $x^2 + 3x - 4$ son $x_1 = 1$ y $x_2 = -4$ (compruébese por la regla de Ruffini o utilizando la ecuación de segundo grado, incluso por el teorema del resto pues fácil observar que si llamamos $P(x) = x^2 + 3x - 4$, entonces $P(x_1) = P(1) = 0$ y $P(x_2) = P(-4) = 0$).

Así pues la inecuación anterior es equivalente a esta otra:

$(x+4)(x-1) < 0$

Dividimos la recta real en tres trozos determinados por las raíces y completamos el cuadro siguiente:

	$(-\infty, -4)$	$(-4, 1)$	$(1, +\infty)$
$x+4$	-	+	+
$x-1$	-	-	+
$(x+4)(x-1)$	+	-	+

Por tanto $(x+4)(x-1) < 0 \Leftrightarrow x \in (-4, 1) \Leftrightarrow -4 < x < 1$

Gráficamente:



Obsérvese que -4 y 1 no son solución de la inecuación pues al sustituir en $x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1)$ se obtiene como resultado 0; y 0 no es menor que 0.

Si en la inecuación la desigualdad no fuera estricta, es decir:

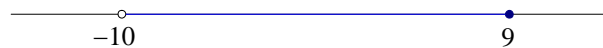
$(3x+1)(3x-1) - 6 \leq (2x-3)^2 + x^2 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 \leq 0 \Rightarrow (x+4)(x-1) \leq 0,$

entonces la solución hubiera sido el intervalo cerrado $[-4, 1]$ en vez del abierto.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } & \left. \begin{aligned} \frac{x-6-x}{2} < x+1 \\ 3 - \frac{5x-1}{10} \geq \frac{x-1}{5} - \frac{x-3}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{2x-6-x}{4} < \frac{4x}{4} + \frac{4}{4} \\ \frac{30-5x-1}{10} \geq \frac{2x-2}{10} - \frac{5x-15}{10} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
 & \left. \begin{aligned} \frac{3x-6}{4} < \frac{4x+4}{4} \\ \frac{-5x+31}{10} \geq \frac{-3x+13}{10} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 3x-6 < 4x+4 \\ -5x+31 \geq -3x+13 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} -x < 10 \\ -2x \geq -18 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x > -10 \\ x \leq 9 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

Obsérvese que, en este último paso, cambia el sentido de las dos desigualdades pues, para despejar x , hemos dividido los dos miembros de ambas entre sendos números negativos (la primera entre -1 y la segunda entre -2).

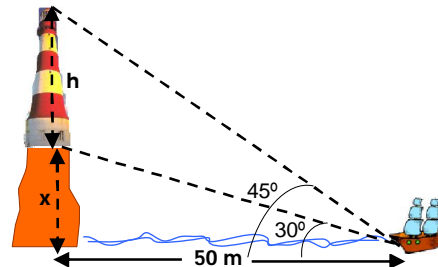
Por tanto la solución son todos aquellos números reales mayores que -10 y menores o iguales que 9 : $\{x \in \mathbb{R} \mid -10 < x \leq 9\} = (-10, 9]$. Gráficamente:



6. a) Sabiendo que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{4}$, hallar $\operatorname{sen} \alpha$ y

$\operatorname{cos} \alpha$ utilizando identidades trigonométricas (resultados racionalizados y simplificados; no vale usar decimales). Obtener además, mediante calculadora, de qué ángulo α se trata.

- b) En la figura adjunta, hallar la altura del acantilado, x , y la del faro, h .



Solución:

$$\text{a) } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{4} \operatorname{cos} \alpha$$

Sustituyendo el valor del seno en la identidad $\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$ se obtiene:

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{4} \operatorname{cos} \alpha \right)^2 + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{5}{16} \operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{5}{16} + 1 \right) \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{21}{16} \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{16}{21} \Rightarrow \operatorname{cos} \alpha = \sqrt{\frac{16}{21}} = \frac{4}{\sqrt{21}} = \frac{4\sqrt{21}}{21}$$

Sustituyendo ahora este valor en $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{4} \operatorname{cos} \alpha$, tenemos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{4} \frac{4\sqrt{21}}{21} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{21}}{21} = \frac{\sqrt{105}}{21}$$

Usando la calculadora $\alpha = \arcsen \frac{\sqrt{105}}{21} \cong 29,2^\circ$

b) Observando la figura:

$$\operatorname{tg}30 = \frac{x}{50} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{50} \Rightarrow x = \frac{50\sqrt{3}}{3} \cong 28,87 \text{ m.}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}45 &= \frac{x+h}{50} \Rightarrow 1 = \frac{x+h}{50} \Rightarrow x+h = 50 \Rightarrow h = 50 - x \Rightarrow h = 50 - \frac{50\sqrt{3}}{3} = \\ &= \frac{150 - 50\sqrt{3}}{3} \cong 21,13 \text{ m.} \end{aligned}$$

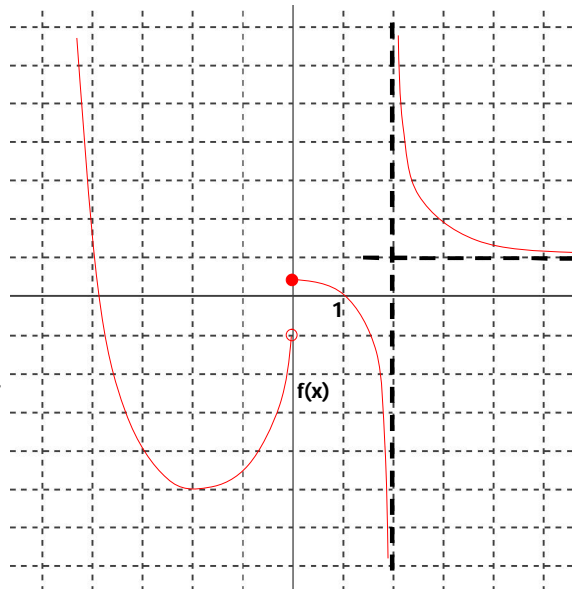
7. Dada la función cuya gráfica aparece al margen, se pide:

- Dominio de definición.
- Estudiar su continuidad.
- Intervalos de crecimiento. *M* y *m*.

Solución:

a) $\operatorname{Dom} f =] - \{2\}$

b) Como en $x=2$ no está definida, f no es continua en $x=2$. Además, tampoco es continua en $x=0$ (en este punto hay una discontinuidad de salto). En el resto de puntos sí que es continua pues la gráfica de la función se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel. Así pues f continua en $] - \{0, 2\}$



c) Fijándonos en la gráfica de la función se tiene que:

- f es estrictamente creciente en $(-2, 0)$
- f es estrictamente decreciente en $(-\infty, -2) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$
- f tiene un mínimo relativo m en el punto $(-2, -5)$, ya que $f(-2) = -5$ y las imágenes de f en los alrededores de $x=-5$ son mayores que $f(-2)$. Este mínimo no es absoluto pues f toma valores tan pequeños como se quiera (obsérvese que $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$)
- f no tiene máximos ni relativos ni absolutos (obsérvese que $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ y que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$).

Observa también que $\operatorname{Im} f =]$ y que f tiene una asíntota vertical en $x=2$.