

"El principio es malo. Aun así, lo peor está por venir"
Hamlet (Shakespeare)

1. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \div \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{4} \div \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)$ c) $7 - \frac{5}{17} + \frac{55}{68} + \frac{9}{34}$ d) $4 \div \left(\frac{7}{9} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{15}{28}\right) - 3$
 e) $\frac{7}{4} - \frac{7}{3}$ f) $\frac{\left(\frac{7}{15}\right)^2}{3 - \frac{1}{5}}$ g) $\frac{\frac{11}{2} + \frac{13}{5}}{3 + \frac{8}{8}}$ h) $2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6}}}$ i) $\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{5}\right) \div \left(\frac{9}{5}\right)^{-1}$ j) $\left(\frac{-1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \div \frac{1}{4}$

k) $\frac{\left(2 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(3 - \frac{1}{3}\right)}{\left(2 + \frac{1}{2}\right) \left(3 + \frac{1}{3}\right)} + 1$ l) $\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{5}{3}\right) + \frac{2}{9}$ m) $\left(\frac{5}{8} - \frac{7}{4}\right) \cdot \left(\frac{6}{5} - \frac{4}{3}\right) + \frac{1}{2}$

2. Simplifica:

a) $(2x^3)(-4x^4)$ b) $(3xy^3)(4x^2y)y^4$ c) $\left(-\frac{3}{4}a^3x^2\right)\left(-\frac{8}{5}a^5\right)(-2^2x^2)$ d) $(3a^2x^3z)^3$
 e) $(-2a^3x^4y^5)^4$ f) $\left(-\frac{1}{5}b^4v^5z^3\right)^3$ g) $\left((-2c^4t^5)^3\right)^3$ h) $(-(-a^3y)^2)^5$ i) $(-x)^3a^2(-3)^4$
 j) $\left(-\frac{3}{4}x^3\right)^4\left(-\frac{2}{3}(-x)^3\right)^3$ k) $(-3a^3x^2)^2(-a^2x^3)^4$ l) $(-a^2(2x^2)^2)^3(-3x^2)^2$
 m) $\frac{-45x^3y^5}{15xy^4}$ n) $\frac{25x^3y^6}{-45x^3y^4}$ o) $\frac{-27x^3y^5}{9x^4y^5}$ p) $\frac{(3a^2b^3)^4}{54a^6b^{10}}$ q) $\frac{(-4x^3(-y^5)^3)^3}{(-2x^2)^4(-y)^6}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{4x+1}{2} + x = \frac{8x+3}{4}$ b) $\frac{2x+1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{6x-1}{2}$ c) $2 - \frac{4x+1}{5} = \frac{4+2x}{3} - \frac{3x+1}{5}$
 d) $\frac{3x+1}{5} + \frac{2x+5}{2} = -\frac{1}{2}$ e) $\frac{2}{5}(2x+1) + \frac{1}{2}(x-2) = 2$ f) $\frac{3}{4}(2x+3) + 1 = \frac{4}{5}(4x+3)$
 g) $\frac{3}{4}(4x-2) - 3x = \frac{1}{2}(4x+5)$ h) $\frac{4}{5}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2} + 2\right)\right] = \frac{8}{5}$ i) $\frac{3x+4}{2} - x = \frac{2x+8}{3}$

4. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{5}y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 2 \\ \frac{x-3}{2} + \frac{y-2}{4} = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x + y = 2 \\ 3x - \frac{y}{2} = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ 3x - 2(y+5) = 0 \end{cases}$
 e) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 4 \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{2} = -2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{6} \\ 2x + y = \frac{13}{2} \end{cases}$ g) $\begin{cases} \frac{2y+2}{8} - \frac{x+4}{2} = y - \frac{x}{4} \\ \frac{x-4}{6} - \frac{2y-2}{12} = -1 + \frac{x}{3} \end{cases}$

5. Calcula un número, sabiendo que su 40% es 58.

6. Calcula el 25% del 55% de 1250.
7. Calcula el 20% de 2300, más el 12% del resultado.
8. Dentro de tres meses, la edad de mi hermana habrá aumentado en un 20%. ¿Qué edad tiene ahora?
9. ¿Por qué número debes multiplicar 29 para disminuirlo en un 12%? ¿Y para aumentarlo en un 1,5%?
10. Calcula con una sola operación el resultado de restar a 530 su 20%.
11. Si al aumentar un número en un 1% se obtiene 454500, ¿de qué número se trata?
12. Si, con un 16% de IVA, un mueble vale 3712 €, ¿cuál es su precio sin IVA?
13. Dentro de un mes, me quedará por pagar el 20% de una moto que me compré y, dentro de dos meses, habré acabado de pagarla. Si pago mensualidades fijas, ¿cuántos meses he tardado en pagarla?
14. Una pelota cae desde una altura de 117 metros. Cada vez que rebota, llega hasta una altura igual a $\frac{1}{3}$ de la anterior. ¿A qué altura se elevará después de rebotar 3 veces?
15. Los $\frac{2}{11}$ de los inscritos en una maratón no se presentan, los $\frac{4}{9}$ se retiran, y 1 de cada 22 inscritos es descalificado. Si había 1188 inscritos, ¿cuántos la acabaron?
16. En un pueblo, la población se ha reducido cada año a la mitad durante los dos últimos años. Si ahora quedan 1500 personas, ¿cuántos habitantes había hace dos años?
17. De una pieza de tela, un sastre usó las $\frac{2}{5}$ partes y, al día siguiente, los $\frac{4}{11}$ de los que quedaba. Si al final le quedaron 42 metros, ¿cuántos metros tenía inicialmente la pieza?
18. Si de una botella de litro, inicialmente llena, tomamos $\frac{1}{3}$ del líquido que contiene, y repetimos la operación dos veces más, ¿cuánto líquido quedará al final?
19. Una rueda y su piñón pesan 250 kilogramos; el peso del piñón es $\frac{3}{7}$ del peso de la rueda. ¿Cuánto pesa la rueda y cuánto el piñón?
20. ¿Por qué fracción hay que multiplicar un número para obtener directamente el resultado de disminuirlo en sus $\frac{5}{13}$ partes?. ¿Y para aumentarlo en sus $\frac{5}{7}$ partes?
21. ¿Por qué número hay que dividir otro para reducirlo a los $\frac{2}{3}$ de su valor?
22. Halla cuatro enteros consecutivos, cuya suma es 326.
23. Un vendedor ambulante lleva piezas de tela (no enteras) para vender. Llegan a comprar dos señoras, y se interesan por el mismo tipo de tejido. Una de ellas pide los $\frac{3}{5}$ de la pieza, y la otra lo que sobró, que fueron 6 metros. ¿Qué número de metros había?
24. Un edificio dedicado a viviendas consta de una planta baja para locales comerciales, cuya altura es de 2,8 metros, cinco pisos todos ellos con la misma altura, y un sexto piso abuhardillado, cuya altura es los $\frac{6}{5}$ de la de los otros. Sabiendo que el edificio en total mide 18,3 metros, calcula la altura de los pisos 1º al 5º.
25. Dos hombres tardan 3 horas en levantar una pequeña tapia de ladrillo. Uno de ellos, que trabaja más rápido que el otro, lo haría sólo en 4 horas. ¿Cuánto tiempo tardaría el segundo trabajando en solitario?
26. Entre dos hermanos tienen 29 años y la edad del mayor será, dentro de ocho años, doble que la del menor. ¿Cuántos años tiene cada uno en la actualidad?
27. Aunque a simple vista no lo parezca, los resultados de las siguientes raíces son todos racionales. Calcúlalos.

a) $\sqrt{\frac{8}{18}}$ b) $\sqrt[3]{\frac{2}{16}}$ c) $\sqrt{\frac{50}{98}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{3}{81}}$

28. Expresa en forma de raíz:

a) $25^{\frac{1}{3}}$ b) $12^{\frac{1}{4}}$ c) $a^{\frac{3}{5}}$ d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$ e) $b^{\frac{2}{7}}$

29. Las potencias de exponente fraccionario verifican todas y cada una de las propiedades de las potencias de exponente entero. Aplica estas propiedades para expresar como una sola potencia:

a) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ b) $3^{\frac{2}{3}} \div 3^{\frac{1}{4}}$ c) $\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^2$ d) $\frac{2 \sqrt[3]{4}}{\sqrt[5]{8}}$

30. Simplifica:

a) $\sqrt[12]{a^{10}}$ b) $\sqrt[3]{a^{12}}$ c) $\sqrt[15]{3^{10}}$ d) $\sqrt[4]{64}$

31. Averigua cuál de las igualdades siguientes es incorrecta:

a) $\sqrt{(a+b)^2} = a+b$ b) $\sqrt[3]{a^3+b^3} = a+b$ c) $\sqrt{a^2-2ab+b^2} = a-b$

32. Expresa en forma de una sola raíz:

a) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5}$ b) $2^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{5}$ c) $\frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{4}}$ d) $\frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 6^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{15}}$ e) $(\sqrt[7]{2^3})^4$ f) $(a+b)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{a-b}$

g) $\sqrt{\sqrt{13}}$ h) $2\sqrt{5}$ i) $3^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{2}$

33. Expresa de la manera más sencilla posible:

a) $\sqrt{10} + 2\sqrt{10} - \frac{1}{2}\sqrt{10}$ b) $3\sqrt{12} - 2\sqrt{75} + 7\sqrt{3}$ c) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[3]{2}$ d) $\frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{5}}{\sqrt[12]{10}}$

e) $\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{18} + \sqrt{32}$ f) $\sqrt{24} + 7\sqrt{6} - 2\sqrt{486}$ g) $\sqrt[3]{108} - 2\sqrt[3]{32}$

h) $\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{8}{27}}$

34. Simplifica al máximo extrayendo, si fuera necesario, el mayor número de factores:

a) $\sqrt{\frac{256}{729}}$ b) $\sqrt[4]{\frac{5^8}{3^{12} \cdot 7^4}}$ c) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2b} \cdot \sqrt[6]{a^3 \cdot b^2}$ d) $\frac{\sqrt[6]{125}}{\sqrt[4]{25}}$ e) $\sqrt{75a^3b^2} + \sqrt{3ab^4}$

f) $\left(\sqrt{\frac{2a^3b}{3}}\right)^4$ g) $\left(2 \cdot \sqrt[3]{\frac{5xy^3}{z^2}}\right)^5$ h) $\sqrt{4 \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[4]{256}}$ i) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$ j) $3 \cdot \sqrt[3]{3^{6m} x^{4m} y^{9m}}$

k) $\sqrt{2(x^2 - y^2)(x + y)}$

35. Completa las igualdades siguientes:

a) $\sqrt[3]{3a^2b} = \sqrt[9]{\dots}$ b) $\sqrt[4]{4a^2b^6} = \sqrt{\dots} = \sqrt[6]{\dots} = \sqrt[8]{\dots}$ c) $\sqrt[4]{2a^3} = \sqrt[80]{\dots}$
 d) $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{\dots} = \sqrt[9]{\dots} = \sqrt[150]{\dots}$

36. Convierte en una única raíz cada una de las expresiones siguientes:

a) $\sqrt[4]{2a^2b} \cdot \sqrt[4]{4ab^2}$ b) $2a\sqrt{a}$ c) $5a^2 \cdot \sqrt[4]{3a^3b^2}$ d) $\frac{\sqrt[3]{ab} \cdot \sqrt[3]{3b}}{\sqrt[3]{9a}}$ e) $\frac{5a \cdot \sqrt[4]{9ab^3}}{3b^2}$
 f) $(\sqrt[7]{a})^5$ g) $(\sqrt[5]{a^4})^7$ h) $(\sqrt[6]{a^5})^2 \cdot a$ i) $\frac{(\sqrt[4]{a^3})^2}{(\sqrt[4]{a})^5}$ j) $\frac{(\sqrt[7]{a^6})^2 \cdot (\sqrt[7]{a^2})}{a^2 \cdot (\sqrt[7]{a^2})}$ k) $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$
 l) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}$ m) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}}$ n) $\sqrt[3]{(\sqrt[5]{a^2})^4}$ o) $a \cdot \left(\sqrt[4]{\sqrt[4]{a^3}}\right)^3$ p) $\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt{a}$
 q) $\sqrt[4]{3a^3b} \cdot \sqrt{24ab^3}$ r) $\sqrt[3]{4a^2} \cdot \sqrt[6]{2a} \cdot \sqrt[4]{4a}$ s) $\frac{\sqrt[4]{5a^3} \cdot \sqrt[6]{5a}}{\sqrt[3]{5a^2} \cdot \sqrt{a}}$

37. Simplifica las siguientes raíces:

a) $\sqrt{3a^2}$ b) $\sqrt[3]{8a^3b}$ c) $\sqrt[4]{16a^5b^8c^9}$ d) $\sqrt[5]{32a^{10}b^{15}c^4}$ e) $\sqrt[3]{2a^{16}}$ f) $\sqrt[3]{8a^8b^{20}}$
 g) $\sqrt[5]{16a^9b^8c^{26}}$ h) $\sqrt[6]{64a^{32}b^{51}}$ i) $\sqrt[3]{2592b^{23}c^{102}}$ j) $\sqrt[3]{5184a^3b^7}$ k) $\sqrt[4]{\frac{2000}{81}a^{21}}$
 l) $\sqrt[3]{2648a^{173}b^{40}}$ m) $\sqrt[3]{\frac{3a^3}{8b^6}}$ n) $\sqrt[4]{\frac{32a^8}{81b^5}}$ o) $\sqrt[3]{\frac{864a^7b}{625c^9a^{112}}}$

38. Multiplica y simplifica las raíces que se obtienen:

a) $\sqrt[3]{12a^2b^2} \cdot \sqrt[3]{18a^2b}$ b) $\sqrt[4]{4a^3x^2} \cdot \sqrt[4]{72ax^2} \cdot \sqrt[4]{18a^2x}$ c) $\sqrt[5]{72a^3} \cdot \sqrt[5]{324a^3}$

39. Simplifica las expresiones siguientes:

a) $\sqrt{75} + \sqrt{27} + \sqrt{48}$ b) $\sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16}$ c) $\sqrt{343} + \sqrt{48} + \sqrt{\frac{28}{81}} + \sqrt{\frac{300}{121}}$
 d) $\sqrt{27a^5} + \sqrt{1875a^5} - \sqrt{48a^5}$ e) $\sqrt{256} + \sqrt{243} + \sqrt{162} + \sqrt{50} + \sqrt{147}$
 f) $\sqrt[3]{\frac{81}{8}} - \sqrt[3]{\frac{375}{64}} + \sqrt[3]{\frac{81}{125}}$ g) $\sqrt{9x^2} + \sqrt{16x^2}$ h) $\sqrt{36x^4 + 64x^4}$ i) $\sqrt{20x^2} + \sqrt{80x^2}$
 j) $\frac{\sqrt{243} - \sqrt{75} + \sqrt{48}}{\sqrt{12}}$ k) $\frac{\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{1923} - \sqrt[3]{375}}{\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{1029} + \sqrt[3]{2187}}$

40. Desarrolla y agrupa todos los términos posibles en las expresiones siguientes:

a) $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2$ b) $(4\sqrt{7} - 3\sqrt{5})^2$ c) $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{6})^2$
 d) $(2\sqrt{7} - 3\sqrt{3}) \cdot (4\sqrt{7} - 5\sqrt{3})$ e) $(2 - \sqrt{2})^3$ f) $(2 - \sqrt{2})^4$ g) $(2 - \sqrt{2})^5$
 h) $(2 + \sqrt{5}) \cdot (3 - 2\sqrt{5}) - (\sqrt{5} + 2)^2 - (\sqrt{5} - 3) \cdot (\sqrt{5} + 3)$

41. Racionaliza las expresiones siguientes:

a) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ b) $\frac{1}{3\sqrt{4}}$ c) $\frac{a}{\sqrt{8a}}$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{8a^2}}$ e) $\frac{b}{\sqrt[3]{a^2b}}$ f) $\frac{2a}{\sqrt[3]{81a^2}}$ g) $\frac{5a}{\sqrt{1000a^5}}$
h) $\frac{6ab}{\sqrt[4]{288a^2b^5}}$ i) $\frac{a}{\sqrt{2a+1}}$ j) $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}$ k) $\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}$ l) $\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}$ m) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{2}}}$
n) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5-\sqrt{3}}}$ o) $\frac{2\sqrt{3}}{7-\sqrt{3}}$ p) $\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+8}$ q) $\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{7}+3\sqrt{2}}$ r) $\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{7\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ s) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3-\sqrt{3}}}$

42. Racionaliza y simplifica las expresiones siguientes:

a) $\sqrt{108} + \frac{6}{\sqrt{27}} + \frac{8}{\sqrt{32}} - \frac{5}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ b) $\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} + \frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$
c) $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} + \frac{5}{3\sqrt{3}+\sqrt{7}}$

43. Convierte en una única potencia de a las expresiones:

a) $a^2\sqrt{a}$ b) $\frac{\sqrt[2]{a^3}}{\sqrt[5]{a^2}}$ c) $\sqrt[5]{a^3}\sqrt[5]{a}$ d) $\sqrt{a^2}\sqrt[4]{a}\sqrt[5]{a}$ e) $\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{a}$

44. Convierte en un producto de la forma $a^p \cdot b^q$ las expresiones:

a) $\sqrt[3]{a^2}\sqrt{ab^3}$ b) $\sqrt[4]{a^3(b^2)^3}\sqrt{a^3}$ c) $\sqrt[3]{a^2}\sqrt[4]{b^5}\sqrt[4]{b^3}$ d) $\frac{\sqrt[3]{a^2}\sqrt{ab^8}}{\sqrt{ab}\sqrt[3]{a^2b}}$

45. Calcula la altura de un triángulo equilátero de lado: a) 1 dm b) 2 dm c) 6 dm ¿Son racionales o irracionales los números que resultan?

46. Utilizando las soluciones anteriores, calcula las respectivas apotemas de un hexágono regular de lado: a) 1 dm b) 2 dm c) 6 dm

47. Dado un cuadrado de x cm de lado, se quiere construir otro cuya área sea el doble. ¿Por cuánto habrá que multiplicar el lado?

48. ¿Cuánto debe aumentar la longitud de una cinta imaginaria que rodea a la Tierra, si el radio de la Tierra aumenta 1cm?

49. Si el rueda de una plaza de toros tiene 20 metros de radio, ¿cuánto costará pintar la barrera si tiene 160 cm de alto y el precio del metro cuadrado de pintura es de 5 €? (Toma como valores de π : 3; 3,14; 3,1416; 3,141592. ¿Qué ocurre en estos casos?)