# Operaciones en el conjunto de los números racionales Q

| OPERACIÓN | EJEMPLO |
|---|---|
| **Suma**<br>$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{bd}$ | **a)** $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 5+3\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{22}{15}$<br>**b)** $\frac{7}{24}+\frac{11}{36}=\frac{7\cdot 3+11\cdot 2}{72}=\frac{43}{72}$<br>**¡OJO!** *Observa como en este último ejemplo el denominador común no es el producto de los denominadores sino el* ***M.C.M.*** *de 24 y 36. De esta manera las operaciones serán mucho más sencillas.* |
| **Resta** (diferencia)<br>$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{bd}$ | $\frac{8}{3}-\frac{6}{4}=\frac{8\cdot 4-6\cdot 3}{3\cdot 4}=\frac{14}{12}=\frac{7}{6}$<br>**¡OJO!** *El resultado siempre hay que simplificarlo. Para ello se divide el numerador y el denominador entre el* ***M.C.D.*** *de ambos. En este caso hemos dividido entre 2 ya que* ***M.C.D.(14, 12) = 2****.* |
| **Producto** (multiplicación)<br>$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$ | $\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{8}=\frac{60}{40}=\frac{3}{2}$ |
| **Cociente** (división)<br>$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$ o bien $\frac{a/b}{c/d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$<br>**Observación:** *la fracción d/c se llama* ***inversa*** *de c/d (fíjate: multiplicándolas da 1). Pues bien,* ***para dividir dos fracciones, se multiplica la primera por la inversa de la segunda.*** | $\frac{15}{7}\div\frac{5}{2}=\frac{30}{35}=\frac{6}{7}$, o lo que es lo mismo,<br>$\frac{15/7}{5/2}=\frac{\text{extremos}}{\text{medios}}=\frac{15\cdot 2}{7\cdot 5}=\frac{30}{35}=\frac{6}{7}$ |
| **Potencia** (de exponente entero positivo o cero)<br>$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}=\frac{a^n}{b^n}$ ; $\left(\frac{a}{b}\right)^0=1$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2^4}{3^4}=\frac{16}{81}$ |
| **Potencia** (de exponente entero negativo)<br>$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}$ ; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n=\frac{b^n}{a^n}$<br>**Observación:** *para hacer una potencia de exponente negativo* ***se cambia la base por su fracción inversa*** *(en este caso a/b por b/a)* ***y el exponente negativo se cambia a positivo****. Así pues el resultado es la potencia de base la fracción inversa elevada al exponente pero positivo.* | $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}=\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{3^4}{2^4}=\frac{81}{16}$<br>**¡OBSERVA!:** *El resultado obtenido (81/16) es la fracción inversa del resultado obtenido anteriormente (16/81), que era la misma potencia pero de exponente positivo.* |

**Es importante recordar que**

La jerarquía entre las operaciones es la siguiente:

1. Corchetes y paréntesis.
2. Productos y cocientes.
3. Sumas y restas.

Así no cometeremos errores a la hora de efectuar operaciones más extensas.

**Ejemplo:**

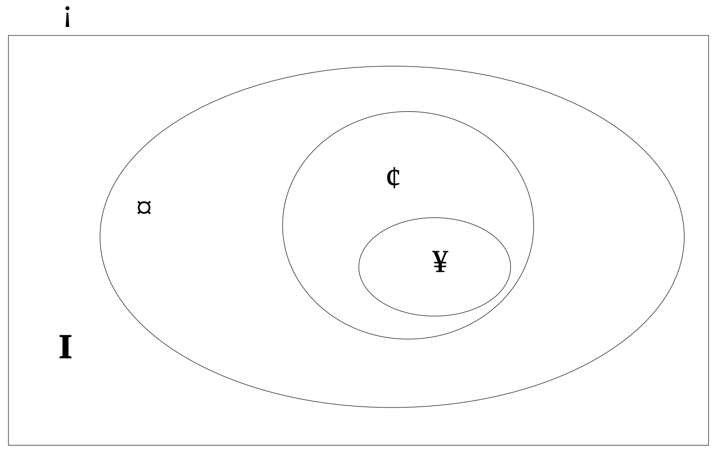
$$\frac{\left[\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right)\div\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)\right]\cdot\left(\frac{-3}{2}+\frac{5}{3}\right)}{\frac{4}{3}-\frac{5}{2}}=\frac{\left[\left(\frac{10+12}{15}\right)\div\left(\frac{3-4}{6}\right)\right]\cdot\left(\frac{-9+10}{6}\right)}{\frac{8-15}{6}}=\frac{\left(\frac{22}{15}\div\frac{-1}{6}\right)\cdot\frac{1}{6}}{\frac{-7}{6}}=$$

$$=\frac{\frac{132}{-15}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{-7}{6}}=\frac{\frac{132}{-90}}{\frac{-7}{6}}=\frac{792}{630}=\frac{132}{105}=\frac{44}{35}$$

# El conjunto de los números reales

| Conjuntos numéricos | |
|---|---|
| El conjunto de los **números naturales**: ¥ | ¥ **=** {1, 2, 3, 4, …, 10, 11, 12, …} |
| El conjunto de los **números enteros**: ¢ | ¢ = {…, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, …} |
| El conjunto de los **números racionales**: ¤ (fracciones) | ¤ $= \left\{ \frac{a}{b} \ : \ a, b \in$ ¢ $\right\}$ |
| **Propiedad:** todo número racional es entero, decimal exacto o decimal periódico (puro o mixto)<br>***Importante:*** *debes recordar de cursos anteriores cómo se expresa un decimal exacto, periódico puro o periódico mixto en forma de fracción. Por ejemplo:*<br>$1,\overset{o}{65} = \frac{165-1}{99} = \frac{164}{99}$ | $\frac{10}{-5} = -2$ (entero); $\frac{13}{8} = 1,625$ (decimal exacto);<br>$\frac{-14}{9} = 1,555... = 1,\overset{)}{5}$ (decimal periódico puro);<br>$\frac{19}{12} = 1,58333... = 1,58\overset{o}{3}3$ (decimal periódico mixto) |
| El conjuto de los **números irracionales I**: está formado por todos aquellos números reales que no son racionales. Tienen infinitas cifras decimales pero no forman período. | 1,234567891011121314151617181920 2122…<br>$\sqrt{2}$ = 1,4142136…<br>$\pi$ = 3,14155927… |

**Representación de los números reales:**




**Intervalos y semirrectas**

| | | |
|---|---|---|
| **Intervalo abierto**: (a, b) = {x ∈ ¡ : a < x < b} | | Números que están comprendidos entre a y b |
| **Intervalo cerrado**: [a, b] = {x ∈ ¡ : a ≤ x ≤ b} | | Números comprendidos entre a y b, incluidos éstos |
| **Intervalo semiabierto** | (a, b] = {x ∈ ¡ : a < x ≤ b} | Números mayores que a y menores o iguales que b |
| | [a, b) = {x ∈ ¡ : a ≤ x ≤ b} | Números mayores o iguales que a y menores que b |
| **Semirrecta** | (– ∞, a) = {x ∈ ¡ : x < a} | Números menores que a |
| | (–∞, a] = {x ∈ ¡ : x ≤ a} | Números menores que a, incluido el propio a |
| | (a, + ∞) = {x ∈ ¡ : x > a} | Números mayores que a |
| | [a, + ∞) = {x ∈ ¡ : x ≥ a} | Númeres mayores que a, incluido el propio a |

# Propiedades de las potencias

| PROPIEDAD | EJEMPLO |
|---|---|
| ***Producto de potencias de la misma base*** = la base elevada a la suma de los exponentes: $\boxed{a^n \cdot a^m = a^{m+n}}$ | $(2x^3y^2)\cdot(-3x^2z^3)\cdot(-4yz^2) = 24x^3x^2y^2yz^3z^2 =$ $= 24x^5y^3z^5$ |
| ***Cociente de potencias de la misma base*** = la base elevada a la diferencia de los exponentes: $\boxed{a^n : a^m = a^{m-n}}$ | $\dfrac{12a^3x^5}{28ax^3} = \dfrac{12}{28}\cdot\dfrac{a^3}{a}\cdot\dfrac{x^5}{x^3} =$ $= \dfrac{3}{7}a^2x^2$ |
| ***Potencia de un producto*** = producto de las potencias: $\boxed{(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$ | $(-2xyzp)^3 = (-2)^3x^3y^3z^3p^3 =$ $= -8x^3y^3z^3p^3$ |
| ***Potencia de un cociente*** = cociente de las potencias: $\boxed{(a : b)^n = a^n : b^n}$ | $\left(\dfrac{-3ab}{2xy}\right)^3 = \dfrac{(-3ab)^3}{(2xy)^3} = \dfrac{-3^3a^3b^3}{2^3x^3y^3} =$ $= \dfrac{-27a^3b^3}{8x^3y^3}$ |
| ***Potencia de una potencia*** = la base elevada al producto de los exponentes: $\boxed{(a^n)^m = a^{n\cdot m}}$ | $\left(-\dfrac{2}{3}x^2z^4\right)^3 = -\left(\dfrac{2}{3}\right)^3(x^2)^3(z^4)^3 =$ $= -\dfrac{8}{27}x^6z^{12}$ |
| ***Cuadrado de una suma*** = cuadrado del primero más dos veces el primero por el segundo, más el cuadrado del segundo: $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ **¡OJO!** *No confundir esta expresión con esta otra, que es errónea*: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ | $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2(2x)3 + 3^2 =$ $= 4x^2 + 12x + 9$ |
| ***Cuadrado de una diferencia*** = cuadrado del primero menos dos veces el primero por el segundo, más el cuadrado del segundo: $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$ **¡OJO!** *No confundir esta expresión con esta otra, que es errónea*: $(a-b)^2 = a^2 - b^2$ | $(5b-3)^2 = (5b)^2 - 2(5b)3 + 3^2 =$ $= 25b^2 - 30b + 9$ |
| ***Suma por diferencia*** = diferencia de cuadrados: $\boxed{(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2}$ | $(4x+2y)\cdot(4x-2y) = (4x)^2 - (2y)^2 =$ $= 16x^2 - 4y^2$ |

**¡Recuerda!:**

Si el signo de la base de una potencia es negativo entonces:

- Si el exponente es **par** el resultado es positivo.
- Si el exponente es **impar** el resultado es negativo.

# Radicales

| | |
|---|---|
| $\sqrt[n]{a} = b \iff a = b^n$<br>$\sqrt[n]{a}$ es el **radical**, a el **radicando** y n el **índice** de la raíz | Si $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a}$ existe cualquiera que sea a.<br>Si $a < 0$, $\sqrt[n]{a}$ solo existe para valores impares de n. |
| **Forma exponencial:**<br>$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ ; $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ | $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$, ya que $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^{\frac{3}{3}} = 2$ |
| **PROPIEDADES DE LOS RADICALES** | |
| $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$ | $\sqrt[8]{81} = \sqrt[8]{3^4} = \sqrt[2\cdot 4]{3^4} = \sqrt{3}$<br>Reducir a índice común $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{2}$ :<br>$\sqrt{2} = \sqrt[2\cdot 3]{2^3} = \sqrt[6]{8}$ ; $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3\cdot 2]{2^2} = \sqrt[6]{4}$ |
| $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$ | $\left(\sqrt[6]{2}\right)^4 = \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2}$ |
| $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ | $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{9}}} = \sqrt[24]{9} = \sqrt[24]{3^2} = \sqrt[12]{3}$ |
| $\sqrt[n]{a\,b} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$ **(raíz de un producto es el producto de la raíces)** | $\sqrt[3]{6}\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3 2} = \sqrt[3]{3^3}\,\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$<br>(observa cómo en este ejemplo la propiedad se ha utilizado dos veces) |
| $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ **(raíz de un cociente es el cociente de las raíces)** | $\frac{\sqrt[3]{12}\sqrt{9}}{\sqrt[6]{6}} = \frac{\sqrt[6]{(12)^2}\,\sqrt[6]{9^3}}{\sqrt[6]{6}} = \sqrt[6]{\frac{(2^2 3)^2\cdot(3^2)^3}{2\cdot 3}} =$<br>$= \sqrt[6]{\frac{2^2\cdot 3^2\cdot 3^6}{2\cdot 3}} = \sqrt[6]{2\cdot 3^7} = \sqrt[6]{4374}$ (observa cómo se han utilizado en este ejemplo varias delas propiedades anteriores para simplificar) |
| **Suma de radicales:** dos expresiones con radicales se dicen *semejantes* si la raíz que contienen tienen el mismo índice y el mismo radicando (por ejemplo, $5\sqrt{2}$ y $-3\sqrt{2}$ son radicales semejantes). Solamente se pueden sumar (o restar) expresiones con radicales que sean semejantes. | $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{75} = \sqrt{2^2\cdot 3} + \sqrt{3^3} - \sqrt{5^2\cdot 3} =$<br>$= 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = (2+3-5)\sqrt{3} = 0$ |
| **RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES** | |
| **Con una raíz cuadrada en el denominador:** se multiplica arriba y abajo por la misma raíz. | $\frac{3}{5\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{5\cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{5}$ |
| **Con una raíz n-ésima en el denominador:** se multiplica arriba y abajo por otra raíz n-ésima tal que se complete el radicando con una potencia n-ésima. | $\frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2^2}} = \frac{2\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{2\sqrt[3]{4}}{2} = \sqrt[3]{4}$ |
| **Con una suma o diferencia de raíces cuadradas en el denominador:** se multiplica arriba y abajo por la expresión conjugada del denominador. | $\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})} =$<br>$= \frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{\left(\sqrt{6}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{6-3} = \sqrt{6}+\sqrt{3}$ |