Examen de 2º Bachillerato B — **Sistemas de ecuaciones. Matrices**

Calificación:

Nombre:

Apellidos:

Calificación pregunta

1. Se dispone de tres cajas A, B y C con monedas de 1 euro. Se sabe que en total hay 36 euros. En la caja A hay dos monedas más que en las otras dos juntas. Si se traslada una moneda de la caja B a la caja A, ésta última tendrá el doble de monedas que B. Averigua cuántas monedas había en cada caja.

Puntuación del ejercicio:

- Presentación de las incógnitas y planteamiento del problema: **1 punto**
- Resolución del mismo mediante el método de Gauss: **1 punto**
- Obtención de las soluciones: **0,5 puntos**

2. Las exportaciones, expresadas en toneladas, de una comunidad autónoma a otras tres que limitan con ella, denotadas por A, B y C, vienen expresadas en la matriz *E*. El precio de la tonelada de cada producto, expresado en miles de euros, durante los años 2005 y 2006 viene dado por la matriz *P*

$$E = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{A} & \text{B} & \text{C} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Trigo} \\ \text{Cebada} \\ \text{Maíz} \end{array} \qquad P = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{Trigo} & \text{Cebada} & \text{Maíz} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 10 & 21 & 8 \\ 7 & 5 & 9 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 2005 \\ 2006 \end{array}$$

a) Efectúa el producto de ambas matrices. **(1 punto)**

b) ¿Qué significan los elementos a_{13} y a_{23} de la matriz producto? **(1 punto)**

c) ¿Cuál es el valor total, en miles de euros

d) , exportado a esas comunidades en los años 2005 y 2006? **(0,5 puntos)**

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$. Encontrar una matriz *B* de la forma $B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$ tal que $B \cdot B^t = A$ **(2 puntos)**

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, resuelve matricialmente la ecuación $ABX - CX = 2C$.

Puntuación del ejercicio:

- Procedimiento para despejar la incógnita *X*: **1 punto**
- Cálculo de la inversa de la matrices correspondientes: **1 punto** (**Consejo:** llama *D* a la matriz $AB - C$)
- Obtención de la matriz *X*: **1 punto**

Soluciones:

1. Llamemos x al número de monedas de la caja A, y al número de monedas de la caja B y z al número de monedas de la caja C. Entonces: $\begin{cases} x+y+z=36 \\ x=y+z+2 \\ x+1=2(y-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=36 \\ x-y-z=2 \\ x-2y=-3 \end{cases}$. Resolvamos el sistema por el método de Gauss: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 0 & -2 & -2 & -34 \\ 0 & -3 & -1 & -39 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2f_3+3f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 0 & -2 & -2 & -34 \\ 0 & 0 & -4 & -24 \end{pmatrix}$

El sistema asociado a esta última matriz es $\begin{cases} x+y+z=36 \\ -2y-2z=-34 \\ \quad -4z=-24 \end{cases}$. De la tercera ecuación se obtiene $z=6$.

Sustituyendo en la segunda: $-2y-12=-34 \Rightarrow -2y=-22 \Rightarrow y=11$. Finalmente, sustituyendo en la primera ecuación: $x+11+6=36 \Rightarrow x=19$.

Por tanto en la caja A había 19 monedas, en la caja B 11 monedas y en la caja C 6 monedas.

2. $E=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 10 & 21 & 8 \\ 7 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

a) $P\cdot E=\begin{pmatrix} 10 & 21 & 8 \\ 7 & 5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 173 & 192 & 146 \\ 109 & 83 & 93 \end{pmatrix}$.

El producto $E\cdot P$ no se puede hacer pues el número de columnas de E no coincide con el número de filas de P (E es de orden 3×3 y P es de orden 2×3)

b) $a_{13}=146$. Expresa que en el año 2005 las exportaciones a la comunidad C ascienden en total a 146 miles de euros (146000 €).

$a_{23}=93$. Significa lo mismo que el anterior pero en el año 2006: las exportaciones en este año a la comunidad C ascienden en total a 93000 €.

c) Año 2005: 173 + 192 + 146 = 511 miles de euros (511000 €)

Año 2006: 109 + 83 + 93 = 285 miles de euros (285000 €)

3. $B\cdot B^t=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2+y^2 & yz \\ zy & z^2 \end{pmatrix}$. Como se debe cumplir que $B\cdot B^t=A$, entonces: $\begin{pmatrix} x^2+y^2 & yz \\ zy & z^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$, es decir: $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ yz=-6 \\ z^2=9 \end{cases}$. De la tercera ecuación se deduce que $z=3$.

Sustituyendo este valor en la segunda se obtiene $y=-2$. Y, por último sustituyendo el valor de y en la primera obtenemos $x^2+4=4 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$. De este modo la matriz B es $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. $ABX - CX = 2C \Rightarrow (AB - C)X = 2C$. Llamando $D = AB - C$, la ecuación es $DX = 2C$. Multiplicando a la izquierda los dos miembros de la igualdad por la inversa de D se tiene que $D^{-1}DX = D^{-1}(2C) \Rightarrow X = D^{-1}(2C)$.

Hallemos la inversa de la matriz D:

$$D = AB - C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 8 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 9 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[6f_3 - f_1]{2f_2 - 3f_1} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{2f_3 - f_2} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_1 + 3f_3]{f_2 - 5f_3} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 & 4 & -6 & 36 \\ 0 & 4 & 0 & -8 & 12 & -60 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{2f_1 + f_2} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 4 & 0 & -8 & 12 & -60 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1/12 \\ f_2/4 \\ f_3 \cdot (-1) \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -12 \end{pmatrix}.$$

Por tanto la matriz inversa de D es $D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -15 \\ -1 & 2 & -12 \end{pmatrix}$

Por otro lado $2C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Por tanto: $X = D^{-1}(2C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -15 \\ -1 & 2 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -40 & 38 & -24 \\ -30 & 30 & -20 \end{pmatrix}$