

**Problemas que se resuelven mediante sistemas de ecuaciones lineales**

1. Dividimos un número de tres cifras "xyz", entre la suma de éstas y obtenemos 20 de cociente y 3 de resto. La cifra de las decenas, "y", es igual a la mitad de la suma de las otras dos. La cifra de las unidades, "z", es igual a la suma de las otras dos. Hallar el número xyz

**Solución:**

Se debe saber que el número "xyz" es  $100x + 10y + z$ . Por tanto dividir el número "xyz" entre la suma de sus cifras es dividir  $100x + 10y + z$  entre  $x + y + z$ .

$$100x + 10y + z \begin{array}{l} \underline{) x + y + z} \\ 3 \quad 20 \end{array}$$

Como Dividendo = Divisor  $\times$  Cociente + Resto:  $100x + 10y + z = 20(x + y + z) + 3$ .

Esta es la primera ecuación del sistema. Las otras dos son sencillas de plantear:

$$\begin{cases} 100x + 10y + z = 20(x + y + z) + 3 \\ y = \frac{x + z}{2} \\ z = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 80x - 10y - 19z = 3 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases} \text{ . Resolvamos el sistema}$$

por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 80 & -10 & -19 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 80L_2+L_1 \\ 80L_3+L_1 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 80 & -10 & -19 & 3 \\ 0 & 150 & -99 & 3 \\ 0 & -90 & 61 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{5L_3+3L_2} \begin{pmatrix} 80 & -10 & -19 & 3 \\ 0 & 150 & -99 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 24 \end{pmatrix}$$

El sistema asociado es:  $\begin{cases} 80x - 10y - 19z = 3 \\ 150y - 99z = 3 \\ 8z = 24 \end{cases}$  . De aquí se obtiene fácilmente que:

$z = 3, y = 2, x = 1$ .

Por tanto el número pedido es el 123.

2. Un alumno de 2º de Bachillerato emplea en la compra de tres lápices, un sacapuntas y dos gomas de borrar, tres euros. El doble del precio de un lápiz excede en cinco céntimos de euro a la suma de los precios de un sacapuntas y de una goma de borrar. Si cada lápiz costara cinco céntimos de euro más, entonces su precio duplicaría al de una goma de borrar. Determina el precio de un lápiz, de un sacapuntas y de una goma de borrar.

**Solución:**

Llamemos  $x$  al precio de un lápiz,  $y$  al precio de un sacapuntas y  $z$  al precio de una goma de borrar. Entonces:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 3 \\ 2x = y + z + 0,05 \\ x + 0,05 = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y + 2z = 3 \\ 2x - y - z = 0,05 \\ x - 2z = -0,05 \end{cases} \text{ . Resolvamos el sistema por el método de Gauss:}$$

Gauss:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0,05 \\ 1 & 0 & -2 & -0,05 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 3L_2-2L_1 \\ 3L_3-L_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 & -5,85 \\ 0 & -1 & -8 & -3,15 \end{pmatrix} \xrightarrow{-5L_3+L_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 & -5,85 \\ 0 & 0 & 33 & 9,9 \end{pmatrix}$$

El sistema asociado es 
$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 3 \\ -5y - 7z = -5,85 \\ 33z = 9,9 \end{cases}$$
. De aquí se obtiene que

$$z = \frac{9,9}{33} = 0,3;$$

$$-5y - 7 \cdot 0,3 = -5,85 \Rightarrow -5y - 2,1 = -5,85 \Rightarrow -5y = -3,75 \Rightarrow y = \frac{-3,75}{-5} = 0,75;$$

$$3x + 0,75 + 2 \cdot 0,3 = 3 \Rightarrow 3x = 3 - 0,75 - 0,6 \Rightarrow 3x = 1,65 \Rightarrow x = \frac{1,65}{3} = 0,55.$$

Por tanto el precio de un lápiz es 0,55 € = 55 céntimos, el de un sacapuntas 0,75 € = 75 céntimos, y el de una goma de borrar 0,3 € = 30 céntimos.

3. Con las 12 monedas que tengo en el bolsillo (de 50 céntimos, de 20 céntimos y de 10 céntimos de euro) puedo comprar un pastel cuyo precio es 2,80 euros. Si una moneda de 50 céntimos lo fuera de 20, entonces el número de las de 20 céntimos y el número de las de 10 céntimos coincidiría. ¿Cuántas monedas tengo de cada clase?

**Solución:**

Llamemos  $x$  al número de monedas de 50 céntimos,  $y$  al número de monedas de 20 céntimos y  $z$  al número de monedas de 10 céntimos. Entonces:

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 0,5x + 0,2y + 0,1z = 2,8 \\ y + 1 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 12 \\ 0,5x + 0,2y + 0,1z = 2,8 \\ y - z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 12 \\ 5x + 2y + z = 28 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

(observa que se ha multiplicado la segunda ecuación por 10 para que en el método de Gauss no aparezcan decimales).

Resolvamos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 5 & 2 & 1 & 28 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2-5L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & -3 & -4 & -32 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3L_2+L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & -3 & -4 & -32 \\ 0 & 0 & -7 & -35 \end{pmatrix}$$

El sistema asociado a esta última matriz es 
$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ -3y - 4z = -32 \\ -7z = -35 \end{cases}$$
, de donde se obtiene

fácilmente que  $z = 5$ ,  $y = 4$ ,  $x = 3$ .

Por tanto tengo 3 monedas de 50 céntimos, 4 monedas de 20 céntimos y 5 monedas de 10 céntimos.

**Ecuaciones matriciales**

1. Despeja la matriz  $X$  en la ecuación  $A \cdot X - B = -3 \cdot X$ . Halla la matriz  $X$  de la

ecuación anterior sabiendo que  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Solución:**

$A \cdot X - B = -3 \cdot X \Rightarrow A \cdot X + 3 \cdot X = B \Rightarrow (A + 3I) X = B$ . Llamando  $D = A + 3I$  la última ecuación es  $D X = B$ . Multiplicando a la izquierda de los dos miembros de la igualdad por la inversa de la matriz  $D$ .  $D^{-1} D X = D^{-1} B \Rightarrow X = D^{-1} B$

Hallemos ahora la inversa de la matriz  $D$ .

$$D = A + 3I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Utilizaremos el método de Gauss para el cálculo de la inversa:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{3\ell_2 - \ell_1 \\ 3\ell_3 - \ell_1}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 11 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{4\ell_3 - \ell_2}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 48 & -3 & -3 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{48\ell_1 - \ell_3 \\ 12\ell_2 + \ell_3}} \begin{pmatrix} 144 & 48 & 0 & 51 & 3 & -12 \\ 0 & 96 & 0 & -15 & 33 & 12 \\ 0 & 0 & 48 & -3 & -3 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\ell_1 - \ell_2}$$

$$\begin{pmatrix} 288 & 0 & 0 & 117 & -27 & -36 \\ 0 & 96 & 0 & -15 & 33 & 12 \\ 0 & 0 & 48 & -3 & -3 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\ell_1/288 \\ \ell_2/96 \\ \ell_3/48}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{117}{288} & -\frac{27}{288} & -\frac{36}{288} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{96} & \frac{33}{96} & \frac{12}{96} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{48} & -\frac{3}{48} & \frac{12}{48} \end{pmatrix}$$

Por tanto  $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{117}{288} & -\frac{27}{288} & -\frac{36}{288} \\ -\frac{15}{96} & \frac{33}{96} & \frac{12}{96} \\ -\frac{3}{48} & -\frac{3}{48} & \frac{12}{48} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{32} & -\frac{3}{32} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{5}{32} & \frac{11}{32} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Así pues:  $X = D^{-1} B = \begin{pmatrix} \frac{13}{32} & -\frac{3}{32} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{5}{32} & \frac{11}{32} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Despeja la matriz  $X$  en la ecuación:  $X^2 + A \cdot X = B$ . Halla la matriz  $X$  de la ecuación

anterior sabiendo que  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Solución:**

$$A^2 + A \cdot X = B \Rightarrow A \cdot X = B - A^2 \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} (B - A^2) \Rightarrow X = A^{-1} (B - A^2)$$

Hallemos la inversa de  $A$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_3 - \ell_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_3 + \ell_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\ell_3 - \ell_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\ell_1 - \ell_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \ell_1/2 \\ \ell_2/2 \\ \ell_3/2 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \text{Entonces } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Por otro lado :

$$B - A^2 = B - A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Así pues: } X = A^{-1} (B - A^2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

**Nota:**

Este es el ejercicio 53 de la página 18, que tiene un error, pues en el enunciado dice: "Despeja la matriz  $X$  en la ecuación  $X^2 + A \cdot X = B$ ", cuando debe decir "Despeja la matriz  $X$  en la ecuación  $A^2 + A \cdot X = B$ ".

3. Despeja la matriz  $X$  en la ecuación:  $X^{-1} \cdot A + A = B$ . Halla la matriz  $X$  sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Solución:**

$$X^{-1} \cdot A + A = B \Rightarrow X^{-1} \cdot A = B - A \Rightarrow X \cdot X^{-1} \cdot A = X(B - A) \Rightarrow A = X(B - A)$$

Observa que al multiplicar por  $X$  los dos miembros de la igualdad la ecuación original la transformamos en otra donde la incógnita es  $X$ . Llamando  $D = B - A$ , la última ecuación es  $A = X \cdot D$ , o lo que es lo mismo  $X \cdot D = A$ . Multiplicando los dos miembros de la igualdad por la inversa de  $D$  a la derecha tenemos que  $X \cdot D \cdot D^{-1} = A \cdot D^{-1} \Rightarrow X = A \cdot D^{-1}$

$$\text{Ahora bien: } D = B - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Calculemos la}$$

inversa de esta matriz  $D$ .

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}_1 \leftrightarrow \mathcal{L}_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}_2 \leftrightarrow \mathcal{L}_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Por tanto } D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Entonces } X = A \cdot D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$