

Programación Lineal

1. Un taller puede fabricar piezas de dos tipos: A y B. hay que considerar estos factores de producción: mano de obra, materias primas y equipo, con las limitaciones que aparecen en la fila inferior del siguiente cuadro:

Pieza	Mano de obra	Materia prima	Equipo	Beneficios
A	4	1	1	2
B	1	1	2	1
Limitación	17	5	10	Máximo

Determinar cuántas piezas se pueden fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio.

Solución:

Las variables de decisión son:

x : piezas de tipo A; y : piezas de tipo B.

La función objetivo es: $B(x, y) = 2x + y$

Planteemos las restricciones. Obsérvese que la mano de obra no puede exceder de 17, la materia prima de 5 y el equipo de 10. Por tanto:

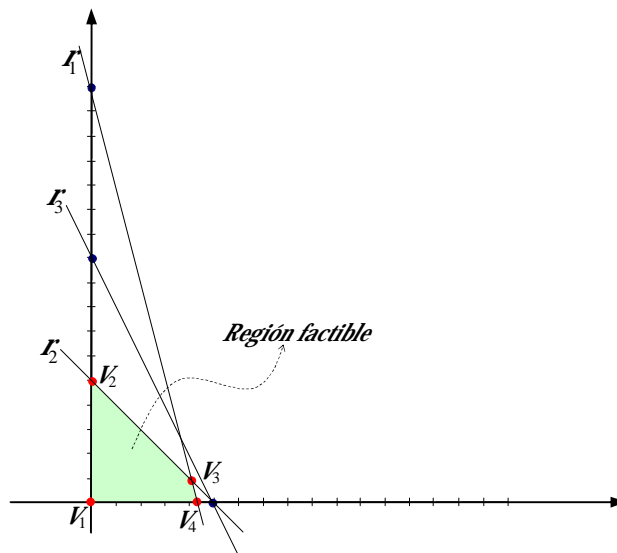
$$\left. \begin{array}{l} 4x + y \leq 17 \\ x + y \leq 5 \\ x + 2y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Representemos ahora las rectas $4x + y = 17$, $x + y = 5$, $x + 2y = 10$ y luego deduzcamos la solución común de cada uno de los semiplanos correspondiente a cada una de las inecuaciones (región factible):

Recta $r_1 \equiv 4x + y = 17$. Puntos de corte con los ejes: $(0, 17)$ y $(4, 25, 0)$

Recta $r_2 \equiv x + y = 5$. Puntos de corte con los ejes: $(0, 5)$ y $(5, 0)$

Recta $r_3 \equiv x + 2y = 10$. Puntos de corte con los ejes: $(0, 5)$ y $(10, 0)$



Es claro que $V_1=(0,0)$, $V_2=(0,5)$, $V_4=(4,25,0)$. Para calcular V_3 hay que resolver el sistema formado por las rectas r_1 y r_2 :

$$\left. \begin{array}{l} 4x+y=17 \\ x+y=5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x+y=17 \\ -4x-4y=-20 \end{array} \right\} \Rightarrow -3y=-3 \Rightarrow y=1.$$

Sustituyendo en la segunda ecuación se tiene $x=4$. Por tanto $V_3=(4,1)$

Evaluemos la función objetivo en los vértices:

$$B(V_1) = B(0,0) = 0 ; B(V_2) = B(0,5) = 5 ; B(V_3) = B(4,1) = 9 ;$$

$$B(V_4) = B(4,25,0) = 8,5$$

Así pues, el máximo beneficio se obtiene en el vértice $V_3=(4,1)$. Por tanto hay que fabricar 4 piezas de tipo A y 1 de tipo B. †

2. Una fábrica de quesos tiene almacenados 5000 litros de leche de vaca, 1000 de oveja y 850 de cabra. Produce dos tipos de queso:

Tipo A: necesita	30 litros de leche de vaca 10 litros de leche de oveja 10 litros de leche de cabra
Tipo B: necesita	20 litros de leche de vaca 15 litros de leche de oveja 10 litros de leche de cabra

Se vende el tipo A a 1300 pts y el tipo B a 1350 pts. ¿Cuántos quesos de hay que fabricar de cada clase para que la venta sea máxima?

Solución:

Las variables de decisión son x : quesos tipo A; y : quesos tipo B.

La función objetivo es: $B(x,y) = 1300x + 1350y$

Planteemos las restricciones:

Leche de vaca: $30x + 20y$. Leche de oveja. $10x + 15y$. Leche de cabra: $10x + 10y$.

Además la producción no puede ser negativa. Por tanto:

$$\left. \begin{array}{l} 30x + 20y \leq 5000 \\ 10x + 15y \leq 1000 \\ 10x + 10y \leq 850 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

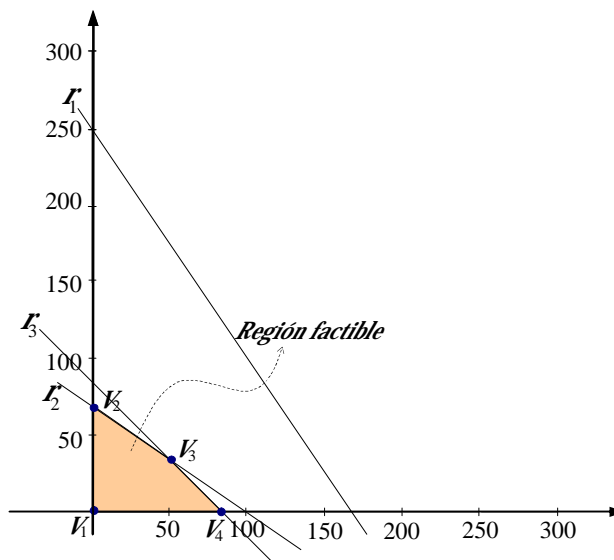
Llamemos $r_1 \equiv 30x + 20y = 5000$, $r_2 \equiv 10x + 15y = 1000$, $r_3 \equiv 10x + 10y = 850$.

Vamos a representar las rectas para obtener la región factible:

Recta $r_1 \equiv 30x + 20y = 5000$. Puntos de corte con los ejes: $(0, 250)$ y $(166,7, 0)$

Recta $r_2 \equiv 10x + 15y = 1000$. Puntos de corte con los ejes: $(0, 66,7)$ y $(100, 0)$

Recta $r_3 \equiv 10x + 10y = 850$. Puntos de corte con los ejes: $(0, 85)$ y $(85, 0)$



Está claro que $V_1 = (0, 0)$, $V_2 = (0, 66,7)$ y $V_4 = (85, 0)$. El vértice V_3 es el punto de corte de las rectas r_2 y r_3 :
$$\left. \begin{array}{l} 10x + 15y = 1000 \\ 10x + 10y = 850 \end{array} \right\} \Rightarrow 5y = 150 \Rightarrow y = 30$$
. Sustituyendo en la primera ecuación $10x + 15 \cdot 30 = 1000 \Rightarrow 10x = 1000 - 450 \Rightarrow 10x = 550 \Rightarrow x = 55$. Por tanto $V_3 = (55, 30)$.

El valor de la función objetivo en los vértices es:

$$B(V_1) = B(0, 0) = 0 \text{ pesetas ; } B(V_2) = B(0, 66,7) = 1350 \cdot 66,7 = 90000 \text{ pesetas ;}$$

$$B(V_3) = B(55, 30) = 1300 \cdot 55 + 1350 \cdot 30 = 112000 \text{ pesetas ;}$$

$$B(V_4) = B(85, 0) = 1300 \cdot 85 = 100500 \text{ pesetas}$$

Por tanto hay que fabricar 55 quesos del tipo A y 30 quesos del tipo B para que la venta sea máxima (112000 pesetas). †

3. Una persona va a iniciar una dieta y recibe las siguientes recomendaciones:

- Debe tomar una mezcla de dos compuestos D_1 y D_2 .
- La cantidad total diaria a ingerir, una vez mezclados los compuestos, no debe ser superior a 150 gramos ni inferior a 50 gramos.
- En la mezcla debe haber más cantidad de D_1 que de D_2 .
- La mezcla no debe contener más de 100 gramos de D_1 .

Se sabe que cada gramo de D_1 aporta 0,3 mg de vitaminas y 4,5 calorías y cada gramo de D_2 aporta 0,2 mg de vitaminas y 1,5 calorías. ¿Cuántos gramos de cada compuesto debe tomar para obtener la máxima cantidad de vitaminas? ¿Cuántos gramos de cada compuesto si desea el mínimo posible de calorías?

Solución:

Las variables de decisión son:

x gramos de compuesto D_1 ; y gramos de compuesto D_2 .

Las funciones objetivo son:

Vitaminas: $V(x, y) = 0,3x + 0,2y$; Calorías: $C(x, y) = 4,5x + 1,5y$

Planteemos las restricciones:

- Como la cantidad total diaria a ingerir, una vez mezclados los compuestos, no debe ser superior a 150 gramos ni inferior a 50 gramos, se tiene que $x + y \leq 150$; $x + y \geq 50$.
- Además, debe haber más cantidad de compuesto D1 que de compuesto D2: $x \geq y$
- Y, por último, la mezcla no debe contener más de 100 gramos de D1: $x \leq 100$

Por tanto las restricciones forman el sistema de inecuaciones siguiente (no podemos olvidar añadir las desigualdades $x \geq 0$, $y \geq 0$, ya que las cantidades de compuesto tanto de D1 como de D2 no pueden ser negativas):

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 150 \\ x + y \geq 50 \\ x \geq y \\ x \leq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

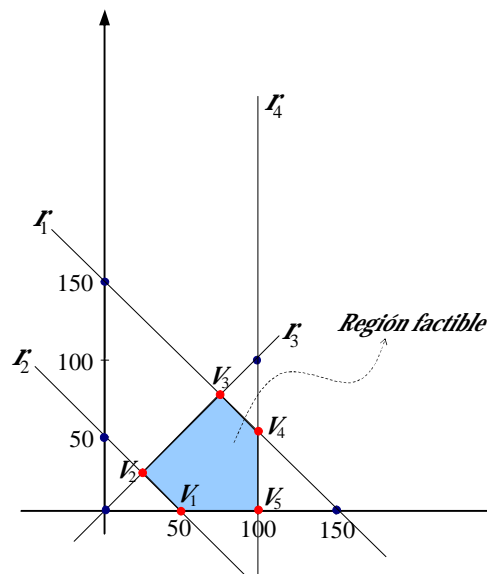
Representemos ahora las rectas $x + y = 150$, $x + y = 50$, $x = y$, $x = 100$, y luego deduzcamos la solución común de cada uno de los semiplanos correspondiente a cada una de las inecuaciones (región factible):

Recta $r_1 \equiv x + y = 150$. Puntos de corte con los ejes: $(0, 150)$ y $(150, 0)$

Recta $r_2 \equiv x + y = 50$. Puntos de corte con los ejes: $(0, 50)$ y $(50, 0)$

Recta $r_3 \equiv x = y$. Pasa por el origen de coordenadas $(0, 0)$. Otro punto, por ejemplo, puede ser el $(100, 100)$, para que se ajuste bien a la escala marcada por los puntos de corte de las rectas anteriores.

Recta $r_4 \equiv x = 100$. Esta es la paralela al eje Y que pasa por $(100, 0)$



Es claro que $V_1 = (50, 0)$ y $V_5 = (100, 0)$. V_4 es el punto de corte de las rectas r_1 y r_4 , es decir, la solución del sistema $\left. \begin{array}{l} x + y = 150 \\ x = 100 \end{array} \right\}$, de donde se deduce fácilmente que

$V_4 = (100, 50)$. De manera similar V_2 es el corte de r_2 y r_3 ; y V_3 el corte de r_1 y r_3 :

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 50 \\ x = y \end{array} \right\} \Rightarrow 2y = 50 \Rightarrow y = 25 \Rightarrow x = 25 \Rightarrow V_2 = (25, 25)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 150 \\ x = y \end{array} \right\} \Rightarrow 2y = 150 \Rightarrow y = 75 \Rightarrow x = 75 \Rightarrow V_3 = (75, 75)$$

Evaluemos las funciones objetivo en los vértices:

Vitaminas:

$$V(V_1) = V(50, 0) = 0,3 \cdot 50 = 15 \text{ mg}$$

$$V(V_2) = V(25, 25) = 0,3 \cdot 25 + 0,2 \cdot 25 = 12,5 \text{ mg}$$

$$V(V_3) = V(75, 75) = 0,3 \cdot 75 + 0,2 \cdot 75 = 37,5 \text{ mg}$$

$$V(V_4) = V(100, 50) = 0,3 \cdot 100 + 0,2 \cdot 50 = 40 \text{ mg}$$

$$V(V_5) = V(100, 0) = 0,3 \cdot 100 = 30 \text{ mg}$$

Calorías:

$$C(V_1) = C(50, 0) = 4,5 \cdot 50 = 225 \text{ calorías}$$

$$C(V_2) = C(25, 25) = 4,5 \cdot 25 + 1,5 \cdot 25 = 150 \text{ calorías}$$

$$C(V_3) = C(75, 75) = 4,5 \cdot 75 + 1,5 \cdot 75 = 450 \text{ calorías}$$

$$C(V_4) = C(100, 50) = 4,5 \cdot 100 + 1,5 \cdot 50 = 525 \text{ calorías}$$

$$C(V_5) = C(100, 0) = 4,5 \cdot 100 = 450 \text{ calorías}$$

Resumiendo:

- Para obtener la máxima cantidad de vitaminas (40 mg), debe tomar 100 gramos de compuesto D_1 y 50 gramos de compuesto D_2 .
- Si se desea el mínimo posible de calorías (150), debe tomar 25 gramos de compuesto D_1 y también 25 gramos de compuesto D_2 . †

4. Un fabricante de llaveros decide aplicar durante un día los siguientes criterios en la producción y venta de sus artículos: El doble del número de llaveros dorados (x) fabricados debe ser mayor o igual que el número de llaveros plateados (y). En cambio, si este último número lo aumentase en 30, la cantidad obtenida sería mayor que el doble del número de llaveros dorados. El número de llaveros plateados no puede ser mayor de 40. La venta de un llavero dorado da un beneficio de 0,8 euros y la de un plateado 0,65 euros.

a) Representa la región factible.

b) Halla los valores de x e y para que el beneficio sea el mayor posible.

c) Calcula el beneficio máximo.

(Septiembre, 2002)

Solución:

La función objetivo, que en este caso es una función beneficio, es la siguiente:

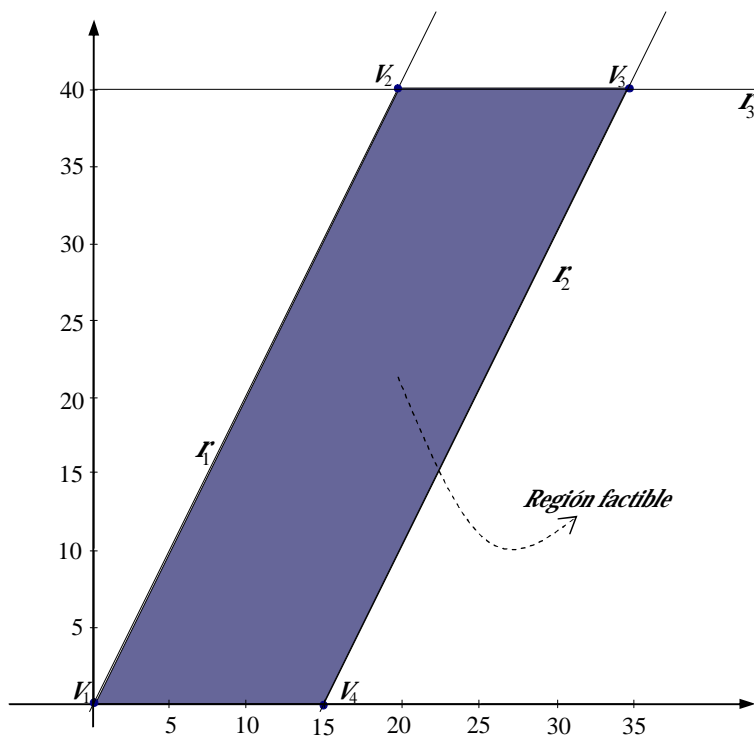
$$B(x, y) = 0,8x + 0,65y$$

Según el enunciado del problema las restricciones a las que están sometidas las variables de decisión x e y son:

$$\left. \begin{array}{l} 2x \geq y \\ y + 30 \geq 2x \\ y \leq 40 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Las rectas asociadas a cada una de las desigualdades son: $r_1 \equiv 2x = y$, $r_2 \equiv y + 30 = 2x$, $r_3 \equiv y = 40$. Representemos cada una de las rectas y la región factible. Para ello tendremos en cuenta que:

- La recta r_1 pasa por el origen de coordenadas y, por ejemplo, por el punto $(20, 40)$.
- La recta r_2 pasa, por ejemplo, por los puntos $(20, 10)$, $(15, 0)$
- La recta r_3 es una recta horizontal que pasa por $y = 40$



Por tanto:

Los vértices de la región factible son, claramente:

$$V_1 = (0, 0), \quad V_2 = (20, 40), \quad V_3 = (35, 40) \quad \text{y} \quad V_4 = (15, 0)$$

Vamos a evaluar cada uno de los vértices en la función objetivo:

$$B(V_1) = B(0, 0) = 0 \text{ €}; \quad B(V_2) = B(20, 40) = 0,8 \cdot 20 + 0,65 \cdot 40 = 42 \text{ €};$$

$$B(V_3) = B(35, 40) = 0,8 \cdot 35 + 0,65 \cdot 40 = 54 \text{ €}; \quad B(V_4) = B(15, 0) = 0,8 \cdot 15 = 12 \text{ €}$$

Entonces para que el beneficio sea el mayor posible se deberán de vender $x = 35$ llaveros dorados e $y = 40$ llaveros plateados.

En este caso el beneficio resultante es de 54 €. †

5. Una empresa de productos de papelería dispone de 270 metros cuadrados de cartón y 432 metros de cinta de goma para la fabricación de dos tipos de carpetas: Tamaño folio y tamaño cuartilla. Para una del primer tipo se necesitan 0,20 metros cuadrados de cartón y 30 centímetros de cinta de goma y se vende a 1,40 euros la unidad. Para una carpeta del segundo tipo se necesitan 0,15 metros cuadrados de cartón y 27 centímetros de cinta de goma y se vende a 1,10 euros la unidad. 1) Representa la región factible. 2) ¿Cuántas carpetas de cada tipo interesa fabricar para que el beneficio que se obtiene con su venta sea lo más grande posible? 3) Calcula ese beneficio máximo.

(Junio, 2003)

Solución:

Llamemos x al número de carpetas tamaño folio e y al número de carpetas tamaño cuartilla que interesaría fabricar.

La función objetivo es $F(x, y) = 1,40x + 1,10y$, pues una carpeta tamaño folio se vende a 1,40 euros la unidad y una carpeta tamaño cuartilla a 1,10 euros la unidad.

Los metros cuadrados de cartón que se utilizan serán $0,20x + 0,15y$, y los centímetros de cinta de goma son $30x + 27y$. Como la disponibilidad es de 270 metros cuadrados de cartón y 432 metros de cinta de goma, las restricciones a las que están sometidas las cantidades de carpetas son:

$$\left. \begin{aligned} 0,20x + 0,15y &\leq 270 \\ 30x + 27y &\leq 43200 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned} \right\}$$

Obsérvese que los 432 metros de cinta de goma se han pasado a centímetros, para que las unidades a ambos miembros de la desigualdad sean las mismas.

Representemos ahora las rectas:

$$0,20x + 0,15y = 270$$

$$30x + 27y = 43200,$$

y deduzcamos la región factible (las restricciones $x \geq 0$, $y \geq 0$ indican que ésta ha de encontrarse en el primer cuadrante).

$$\text{Recta } r_1 \equiv 0,20x + 0,15y = 270.$$

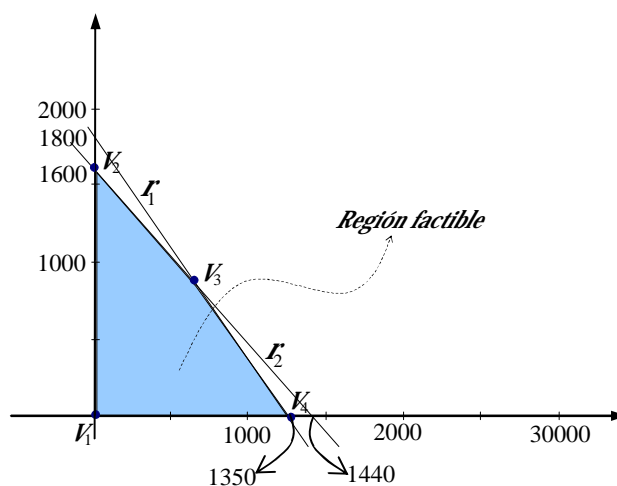
Puntos de corte con los ejes:

$$(0, 1800), (1350, 0)$$

$$\text{Recta } r_2 \equiv 30x + 27y = 43200.$$

Puntos de corte con los ejes:

$$(0, 1600), (1440, 0)$$



Está claro que los vértices V_1 , V_2 y V_4 son $V_1 = (0, 0)$, $V_2 = (0, 1600)$ y $V_4 = (1350, 0)$. El vértice V_3 es el punto de corte de las rectas r_1 y r_2 . Por tanto

hemos de resolver el sistema $\left. \begin{aligned} 0,20x + 0,15y &= 270 \\ 30x + 27y &= 43200 \end{aligned} \right\}$. Multiplicando la primera

ecuación por -150 :
$$\left. \begin{array}{l} -30x - 22,5y = -40500 \\ 30x + 27y = 43200 \end{array} \right\}, \text{ y sumando ambas } 4,5y = 2700.$$

Entonces $y = \frac{2700}{4,5} \Rightarrow y = 600$. Sustituyendo este valor en la segunda ecuación:

$$30x + 27 \cdot 600 = 43200 \Rightarrow 30x + 16200 = 43200 \Rightarrow 30x = 27000 \Rightarrow x = 900.$$

Por tanto $V_3 = (900, 600)$.

Evaluando la función objetivo en los vértices:

$$F(V_1) = F(0, 0) = 0$$

$$F(V_2) = F(0, 1600) = 1,10 \cdot 1600 = 1760$$

$$F(V_3) = F(900, 600) = 1,40 \cdot 900 + 1,10 \cdot 600 = 1920$$

$$F(V_4) = F(1350, 0) = 1,40 \cdot 1350 = 1890$$

De este modo, interesa fabricar 900 carpetas de tamaño folio y 600 carpetas de tamaño cuartilla para obtener el máximo beneficio.

Este beneficio máximo será de 1920 euros (en realidad este valor no es el beneficio máximo pues habría que deducir del mismo los costes de producción, pero lo que es seguro es que a partir del mismo sí que se obtiene el máximo beneficio). †

6. Un fabricante de abanicos dispone de dos modelos A y B. El modelo A requiere, para su elaboración, 20 cm² de papel, 120 cm² de lámina de madera y 1 enganche metálico. El modelo B requiere: 60 cm² de papel, 80 cm² de lámina de madera y 1 enganche metálico. El coste de producción de cada modelo es 1,20 euros el A y 1,30 euros el B. El precio de venta es de 1,80 euros cada uno, independientemente del modelo. Teniendo en cuenta que las existencias son de 3000 cm² de papel, 7200 cm² de lámina de madera y 70 enganches. **1)** Representa la región factible. **2)** Determina el número de abanicos de cada modelo que ha de hacer para obtener un beneficio máximo. **3)** Calcula cuál es ese beneficio.

(Junio, 2004)

Solución:

Llamemos x al número de abanicos del modelo A e y al número de abanicos del modelo B.

La función objetivo es claramente $F(x, y) = 1,80x + 1,80y$, puesto que el precio de venta de cada abanico es 1,80 euros, independientemente del modelo.

Las restricciones a que están sujetas las variables de decisión x e y tienen que ver con el papel, la lámina de madera y los enganches utilizados para la elaboración de los abanicos:

$$\left. \begin{array}{l} 20x + 60y \leq 3000 \\ 120x + 80y \leq 7200 \\ x + y \leq 70 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

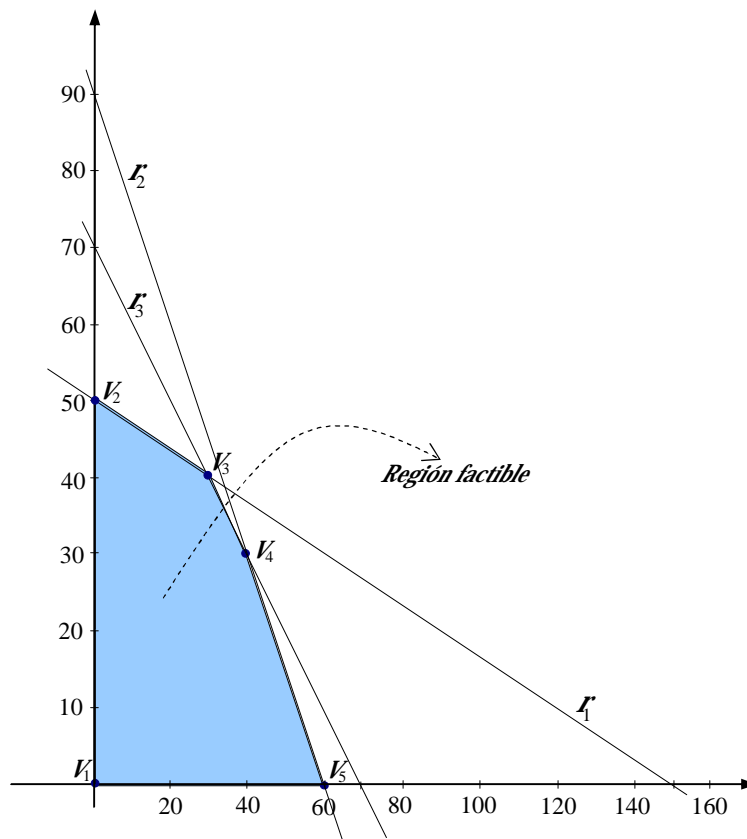
Para dibujar la región factible representaremos las rectas asociadas a cada una de las desigualdades:

$$r_1 \equiv 20x + 60y = 3000. \text{ Puntos de corte con los ejes: } (0, 50) \text{ y } (150, 0)$$

$r_2 \equiv 120x + 80y = 7200$. Puntos de corte con los ejes: $(0, 90)$ y $(60, 0)$

$r_3 \equiv x + y = 70$.

Puntos de corte con los ejes: $(0, 70)$ y $(70, 0)$



Los vértices de la región factible son:

Claramente $V_1 = (0, 0)$, $V_2 = (0, 50)$, $V_5 = (60, 0)$

V_3 es el punto de corte de r_1 y r_3 . Para obtenerlo hemos de resolver el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 20x + 60y = 3000 \\ x + y = 70 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 20x + 60y = 3000 \\ -20x - 20y = -1400 \end{array} \right\} \Rightarrow 40y = 1600 \Rightarrow y = 40 \Rightarrow x = 30.$$

Entonces $V_3 = (30, 40)$

V_4 es el punto de corte de r_2 y r_3 . Ahora hemos de resolver este otro sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 120x + 80y = 7200 \\ x + y = 70 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 120x + 80y = 7200 \\ -80x - 80y = -5600 \end{array} \right\} \Rightarrow 40x = 1600 \Rightarrow x = 40 \Rightarrow y = 30.$$

Entonces $V_4 = (40, 30)$

Evaluemos todos los vértices en la función objetivo:

$$F(V_1) = F(0, 0) = 0 \text{ €}; \quad F(V_2) = F(0, 50) = 1,80 \cdot 50 = 90 \text{ €}$$

$$F(V_3) = F(30, 40) = 1,80 \cdot 30 + 1,80 \cdot 40 = 126 \text{ €};$$

$$F(V_4) = F(40, 30) = 1,80 \cdot 40 + 1,80 \cdot 30 = 126 \text{ €};$$

$$F(V_5) = F(60, 0) = 1,80 \cdot 60 = 108 \text{ €}$$

Obsérvese que hay dos vértices que hacen que las ventas (y por tanto el beneficio) sea máximo. Éstos son V_3 (30 abanicos del modelo A y 40 abanicos del modelo B)

y V_4 (40 abanicos del modelo A y 30 abanicos del modelo B). Las ventas en ambos casos ascienden a 126 € y, por tanto, en cualquiera de los dos casos el beneficio será máximo. Además también será máximo el beneficio en cualquier otro punto de la recta r_3 situado entre V_3 y V_4 . Por ejemplo, si se venden 35 abanicos de cada tipo. Esto es porque la recta $x+y=70$ es paralela a la recta asociada a la función beneficio: $1,8x+1,8y=0$, o lo que es lo mismo $x+y=0$. Si ahora trasladamos esta última paralelamente a sí misma se puede observar que coincide con el segmento que une los vértices V_3 y V_4 .

7. En una tienda de artículos deportivos se pueden adquirir, entre otros productos, raquetas de bádminton y raquetas de tenis. El beneficio por la venta de cada raqueta es de 20 y 25 euros, respectivamente. Por cuestiones de estrategia comercial, se decide vender al día, como máximo, 6 raquetas de bádminton y 5 de tenis. Considerando que el número total de raquetas vendidas no puede ser mayor que 7, **1)** representa la región factible, **2)** halla el número de raquetas que debe venderse de cada clase para que el beneficio sea máximo y **3)** calcula ese beneficio máximo.

(Junio, 2006)

Solución:

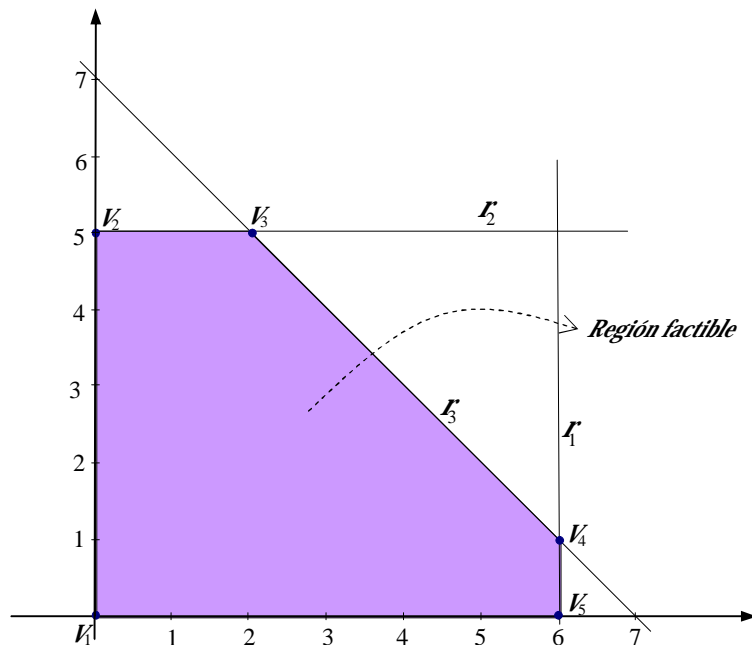
Llamaremos x al número de raquetas de bádminton e y al número de raquetas de tenis.

La función objetivo, en este caso una función beneficio, es $B(x, y) = 20x + 25y$.

Las restricciones son las siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} x \leq 6 \\ y \leq 5 \\ x + y \leq 7 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Representemos las rectas $r_1 \equiv x=6$, $r_2 \equiv y=5$, $r_3 \equiv x+y=7$ y la región factible:



Es claro que los vértices son: $V_1=(0,0)$, $V_2=(0,5)$, $V_3=(2,5)$, $V_4=(6,1)$ y $V_5=(6,0)$. El beneficio en cada uno de ellos es:

$$B(V_1) = B(0,0) = 0 \text{ €}; \quad B(V_2) = B(0,5) = 25 \cdot 5 = 125 \text{ €};$$

$$B(V_3) = B(2,5) = 20 \cdot 2 + 25 \cdot 5 = 165 \text{ €}; \quad B(V_4) = B(6,1) = 20 \cdot 6 + 25 \cdot 1 = 145 \text{ €};$$

$$B(V_5) = B(6,0) = 20 \cdot 6 = 120 \text{ €}$$

Por tanto deben venderse 2 raquetas de bádmiton y 5 de tenis para obtener el máximo beneficio que, en ese caso, sería de 165 €.†

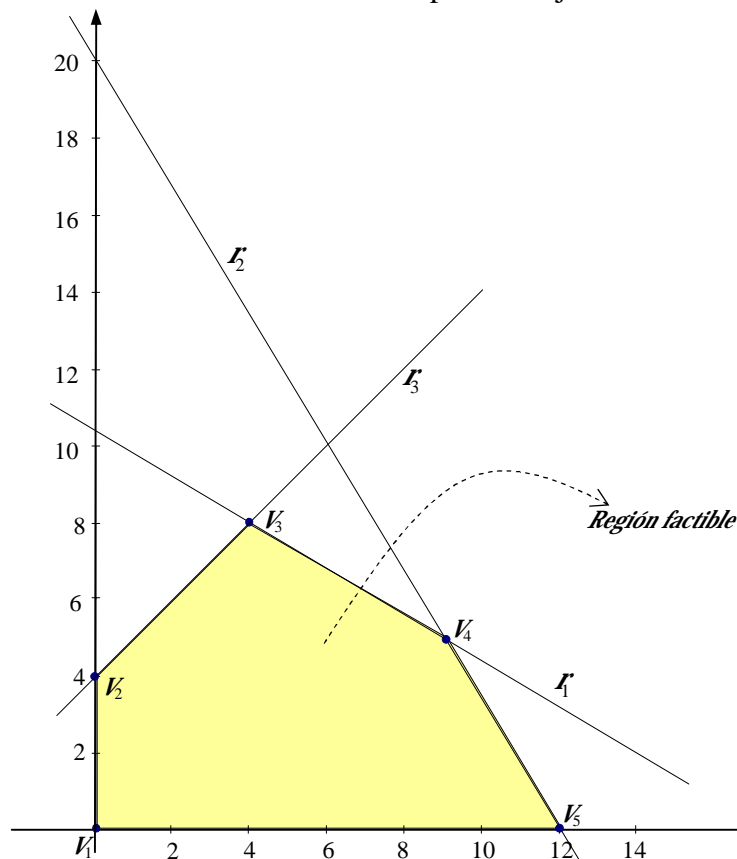
8. Una confitería realiza una oferta a sus clientes través de dos tipos de lotes A y B. El lote A lleva 3 tabletas de turrón y 5 cajas de bombones. El lote B está compuesto por 5 tabletas de turrón y 3 cajas de bombones. Por cuestiones de estrategia comercial, el número de lotes del tipo B debe ser menor que el número de lotes del tipo A incrementado en 4. El número de tabletas de turrón disponibles en el almacén para esta oferta es 52 y el de cajas de bombones, 60. La venta de un lote del tipo A reporta una ganancia de 6,5 euros y uno del tipo B, 8,5 euros. **1)** Dibuja la región factible. **2)** Determina el número de lotes de cada tipo que debe vender para que la ganancia sea lo mayor posible. **3)** Calcula esa ganancia máxima.

(Junio, 2009)

Solución:

Sean x el número de lotes del tipo A e y el número de lotes del tipo B. La función beneficio o ganancia es $B(x, y) = 6,5x + 8,5y$.

Según el enunciado el número de lotes de cada tipo está sujeto a las restricciones:



$$\left. \begin{array}{l} 3x+5y \leq 52 \\ 5x+3y \leq 60 \\ y \leq x+4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Representando las rectas $r_1 \equiv 3x+5y=52$, $r_2 \equiv 5x+3y=60$, $r_3 \equiv y=x+4$, se obtiene la región factible representada en la página anterior:

Como los puntos de corte de la recta r_1 con los ejes dan decimales buscaremos dos puntos cuyas coordenadas sean enteras. Así, por ejemplo si $y=2 \Rightarrow x=14$ y si $x=4 \Rightarrow y=8$; luego la recta r_1 pasa por $(14, 2)$ y $(4, 8)$.

Los puntos de corte de la recta r_2 con los ejes son $(0, 20)$ y $(12, 0)$.

Los puntos de corte de la recta r_3 con los ejes son $(0, 4)$ y $(-4, 0)$. Tomaremos otro punto que esté en el primer cuadrante por comodidad: $(8, 12)$.

Así pues:

Es claro que $V_1=(0, 0)$, $V_2=(0, 4)$ y $V_5=(12, 0)$.

V_3 es el punto de corte de r_1 y r_3 , es decir la solución del sistema $\left. \begin{array}{l} 3x+5y=52 \\ y=x+4 \end{array} \right\}$.

Por sustitución: $3x+5(x+4)=52 \Rightarrow 8x=32 \Rightarrow x=4 \Rightarrow y=8 \Rightarrow V_3=(4, 8)$

De manera parecida, V_4 es el punto de corte de r_1 y r_2 : $\left. \begin{array}{l} 3x+5y=52 \\ 5x+3y=60 \end{array} \right\}$.

Multiplicando la primera ecuación por -5 , la segunda por 3 y sumando ambas: $\left. \begin{array}{l} -15x-25y=-260 \\ 15x+9y=180 \end{array} \right\} \Rightarrow -16y=-80 \Rightarrow y=5$. Sustituyendo en la primera ecuación:

$3x+5 \cdot 5=52 \Rightarrow 3x=27 \Rightarrow x=9$. Entonces $V_4=(9, 5)$.

Evaluemos la función objetivo en los vértices:

$$B(V_1) = B(0, 0) = 0 \text{ €}; \quad B(V_2) = B(0, 4) = 8,5 \cdot 4 = 34 \text{ €};$$

$$B(V_3) = B(4, 8) = 6,5 \cdot 4 + 8,5 \cdot 8 = 94 \text{ €}; \quad B(V_4) = B(9, 5) = 6,5 \cdot 9 + 8,5 \cdot 5 = 101 \text{ €};$$

$$B(V_5) = B(12, 0) = 6,5 \cdot 12 = 78 \text{ €}$$

Por tanto, se deben vender 9 lotes del tipo A y 5 lotes del tipo B para que la ganancia sea máxima. Esta ganancia asciende a 101 €,†