Para la fabricación de un determinado abono orgánico A se necesita una sustancia química B, con la siguiente condición: La cantidad de sustancia A debe estar comprendida entre la cantidad de sustancia B y el triple de ésta. El beneficio por la venta de 1 kilogramo de A es de 10 euros y el coste de cada kilogramo de B es de 6 euros. En un determinado día de producción, la suma de las cantidades de A y de B no puede superar los 800 kilogramos.

1) Representa la región factible.

2) Determina la cantidad de abono producido para que el beneficio sea máximo.

3) Calcula cuál es ese beneficio máximo.

Solución:

Las variables de decisión son:

x: cantidad de sustancia A; *y*: cantidad de sustancia B (ambas cantidades en kilogramos).

La función objetivo es: $B(x,\ y)=10x-6y$ (ya que por cada 10 euros de beneficio por kilo de la sustancia A hay un coste de 6 euros por kilo de la sustancia B).

Planteemos las restricciones:

El hecho de que la cantidad de sustancia A (*x*) deba estar comprendida entre la cantidad de sustancia B (*y*) y el triple de ésta (3*y*) se expresa así: $y<x<3y$. Esto son dos restricciones: $y<x$ por un lado y $x<3y$ por otro. Además, como la suma de las cantidades de A y de B no puede superar los 800 kilogramos se tiene que $x+y<800$. Como siempre, hemos de suponer también que las cantidades son no negativas: $x\geq 0$, $y\geq 0$.

Así pues, las restricciones son: $\begin{cases} y<x \\ x<3y \\ x+y<800 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$

Representemos ahora las rectas $y=x$, $x=3y$, $x+y=800$ y luego deduzcamos la solución común de cada uno de los semiplanos correspondiente a cada una de las inecuaciones (región factible):

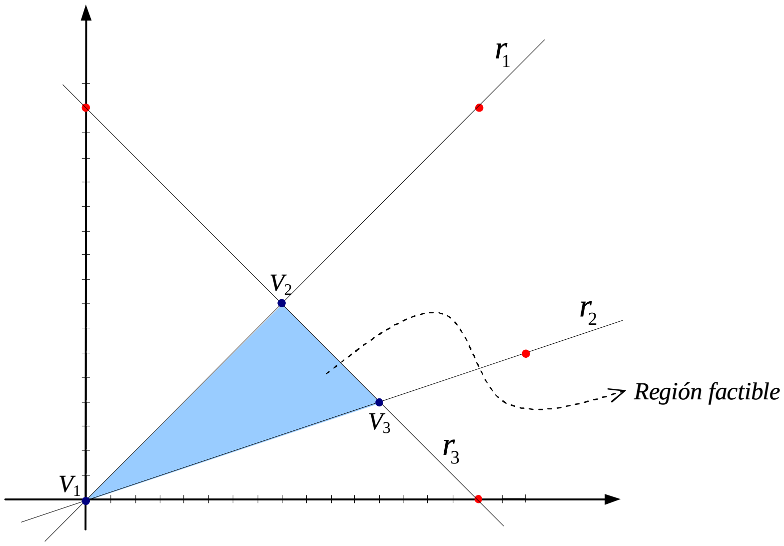
Recta $r_1\equiv y=x$. Esta recta pasa por el origen: $(0,0)$ y todos los demás puntos son de la forma $(x,\ x)$. Es la bisectriz del primer y del tercer cuadrante.

Recta $r_2\equiv x=3y$. Esta recta también pasa por el origen: $(0,0)$ y cualquier otro punto es de la forma $(3x,\ x)$, por ejemplo si $y=300$, $x=900$. Así pues otro punto es $(900,\ 300)$.

Recta $r_3\equiv x+y=800$. Puntos de corte con los ejes: $(0,800)$ y $(800,0)$.

Los vértices son:

- $V_1 = (0, 0)$.
- V_2 es el corte de las rectas r_1 y r_3. Por tanto hay que resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} y = x \\ x + y = 800 \end{cases} \Rightarrow x = 400,\ \ y = 400$. Así pues $V_2 = (400,\ 400)$.
- V_3 es el corte de las rectas r_2 y r_3. Por tanto hay que resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x = 3y \\ x + y = 800 \end{cases} \Rightarrow x = 600,\ \ y = 200$. Así pues $V_3 = (600,\ 200)$.



Evaluemos la función objetivo en los vértices:

- $B(V_1) = B(0, 0) = 0$.
- $B(V_2) = B(400,\ 400) = 10 \cdot 400 - 6 \cdot 400 = 4000 - 2400 = 1600$.
- $B(V_3) = B(600,\ 200) = 10 \cdot 600 - 6 \cdot 200 = 6000 - 1200 = 4800$.

Por tanto, el máximo beneficio se obtiene en el vértice $V_3 = (600, 200)$. Es decir, hay que producir 600 kilogramos de sustancia A y 200 kilogramos de sustancia B para que el beneficio sea máximo. Tal beneficio máximo es de 4800 euros. †