

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II

Probabilidad

Índice

| | |
|---|-----------|
| 1. Experimentos aleatorios | 2 |
| 1.1. Espacio muestral | 2 |
| 1.2. Los sucesos | 2 |
| 1.3. Operaciones con sucesos | 3 |
| 1.3.1. Unión de sucesos | 4 |
| 1.3.2. Intersección de sucesos | 4 |
| 1.3.3. Diferencia de sucesos | 4 |
| 1.4. Las leyes de Morgan y otras propiedades | 5 |
| 2. Probabilidad | 6 |
| 2.1. Definición axiomática | 7 |
| 3. Experimentos compuestos. Diagramas de árbol | 9 |
| 4. Probabilidad condicionada | 11 |
| 4.1. Probabilidad de la intersección de sucesos | 13 |
| 5. Independencia de sucesos | 14 |
| 6. Probabilidad total | 15 |
| 7. Teorema de Bayes | 16 |
| 8. Ejercicios | 19 |

1. Experimentos aleatorios

Frente a un tipo de experimentos, cuya repetición produce idénticos resultados (experimentos deterministas), podemos considerar aquellos otros caracterizados porque no se puede prever su desenlace, a pesar de que se ejecuten siempre en las mismas condiciones. Son los *experimentos aleatorios*, de cuya existencia bien pueden servir, como ejemplo, los juegos de azar: el lanzamiento de una moneda, de un dado o la extracción de una carta en una baraja, etc. En todos ellos el resultado es incierto, aun tomando las máximas precauciones para simular idénticamente las condiciones del juego.

1.1. Espacio muestral

En toda experiencia aleatoria es conveniente conocer y enumerar el abanico de posibles manifestaciones de la misma. Cada una de ellas se llama *suceso elemental* y su conjunto constituye el *espacio muestral* del experimento, que suele representarse por la letra E .

Ejemplos:

- El espacio muestral de los puntos obtenidos al tirar un dado es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Cada uno de esos número es un suceso elemental.
- El espacio muestral del experimento consistente en extraer una bola de una bolsa en la que hay 3 rojas, 2 blancas y 4 verdes es $E = \{R, B, V\}$. Se han llamado R , B y V a los sucesos elementales “salir bola roja”, “salir bola blanca” y “salir bola verde”, respectivamente.
- Si se lanzan dos monedas, y se anota el resultado obtenido, el espacio muestral será $E = \{CC, CX, XC, XX\}$. En este ejemplo se ha llamado C al suceso elemental “salir cara” y X al suceso elemental “salir cruz”.

Cuando dos o más experimentos simples se realizan a la vez, tenemos un *experimento compuesto*. Por ejemplo, tirar un dado y una moneda a la vez, o tirar dos monedas a la vez.

1.2. Los sucesos

Todo subconjunto del espacio muestral constituye un suceso del experimento. Por tanto, un *suceso* está formado por uno o varios sucesos elementales. Los sucesos suelen denotarse con letras mayúsculas: A, B, \dots

Ejemplos:

- Sucesos del experimento aleatorio lanzar dos monedas pueden ser:
 - ✓ Sacar una cara y una cruz: $A = \{CX, XC\}$.
 - ✓ Sacar al menos una cruz: $B = \{CX, XC, XX\}$.

Obsérvese como ambos sucesos son subconjuntos del espacio muestral $E = \{CC, CX, XC, XX\}$.

- En el lanzamiento de dos dados podemos considerar los siguientes sucesos:
 - ✓ Suma de puntuaciones igual a 7: $C = \{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$.
 - ✓ Ambas puntuaciones menores que 3: $D = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.

Hay subconjuntos de todo espacio muestral E , o lo que es lo mismo, sucesos asociados a todo experimento aleatorio que merecen una especial atención. Éstos son:

- El subconjunto vacío, \emptyset , que al no poseer sucesos elementales (carece de elementos), se denomina *suceso imposible*.
- El conjunto E , que obviamente contiene todo suceso elemental y, por tanto, ocurrirá siempre, por lo que lo denominamos *suceso seguro*.
- Dado un subconjunto A de un espacio muestral, se puede pensar en otro subconjunto con todos los sucesos elementales que no son de A . A éste se le llama *suceso contrario o complementario de A* , que se denota \bar{A} . Gráficamente, si el suceso seguro E se representa por un rectángulo, \bar{A} será la región del rectángulo no contenida en A (ver Figura 1).

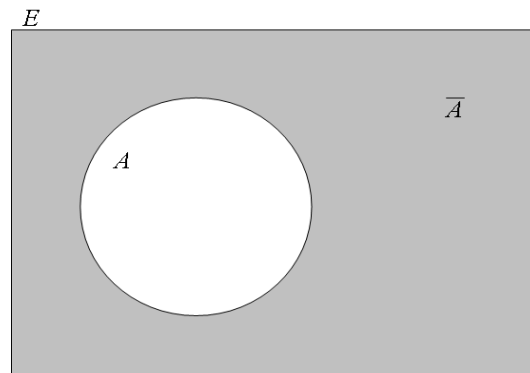


Figura 1: Complementario de A

Ejemplos:

- El suceso contrario de sacar al menos una cruz al tirar dos monedas ($B = \{CX, XC, XX\}$) es no sacar ninguna cruz, que es lo mismo que sacar dos caras, o sea, $\bar{B} = \{CC\}$.
- Consideremos el experimento “lanzar un dado”. El suceso salir par es $A = \{2, 4, 6\}$. El suceso contrario de A será no salir par, es decir, salir impar: $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$

1.3. Operaciones con sucesos

Las operaciones que pueden definirse con sucesos son tres: unión, intersección y diferencia.

1.3.1. Unión de sucesos

La *unión* de dos sucesos A y B , que se denota por $A \cup B$ y se lee A unión B , es el suceso que se cumple cuando lo hace A , B o ambos a la vez. Esto es, cuando se cumple al menos uno de los sucesos A o B (Figura 2(a)).

Hay tres *propiedades de la unión de sucesos* que son evidentes:

$$A \cup E = E \quad A \cup \emptyset = A \quad A \cup \bar{A} = E$$

1.3.2. Intersección de sucesos

La *intersección* de dos sucesos A y B se denota por $A \cap B$ (que se lee A intersección B) y es el suceso que se cumple cuando lo hacen ambos sucesos a la vez (Figura 2(a)). Se dice que dos sucesos son *incompatibles* cuando su intersección es el suceso imposible: A y B incompatibles $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$

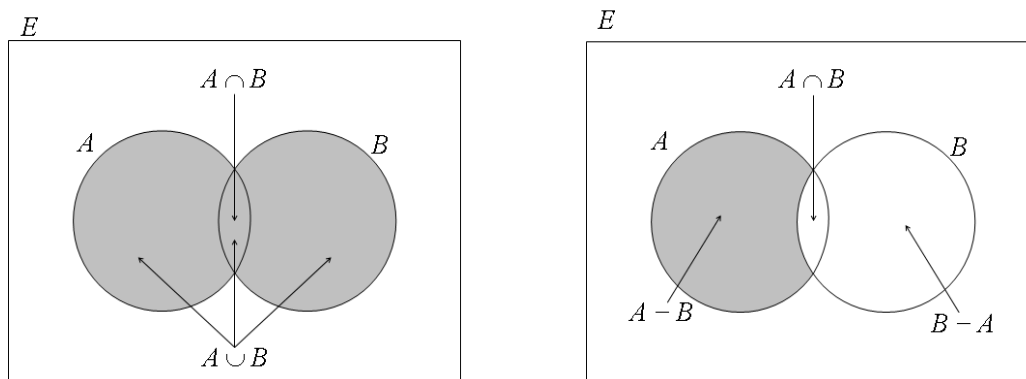
Las *propiedades de la intersección de sucesos* (también evidentes) son:

$$A \cap E = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset \quad A \cap \bar{A} = \emptyset$$

1.3.3. Diferencia de sucesos

La *diferencia de dos sucesos* A y B , $A - B$, es el suceso que se presenta cuando lo hace A pero no B . Con ayuda de la Figura 2(b) puedes comprobar las siguientes propiedades:

$$(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B \quad A - B = A \cap \bar{B}$$



(a) Unión e Intersección

(b) Diferencia de sucesos

Figura 2: Unión, Intersección y Diferencia de sucesos

Ejemplo: En el experimento lanzar un dado, consideremos los sucesos A , “salir par” y B , “salir múltiplo de 3”. Es decir, $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 6\}$. Entonces:

- El suceso unión consiste en salir par o múltiplo de 3: $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$.

- La intersección consiste en que un resultado sea simultáneamente par y múltiplo de 3, o sea: $A \cap B = \{6\}$.
- La diferencia de A y B es salir par pero no salir múltiplo de 3: $B = \{2, 4\}$.

1.4. Las leyes de Morgan y otras propiedades

Las leyes de Morgan dan la relación entre la unión e intersección de sucesos y sus complementarios. Son las siguientes:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

A veces no es fácil interpretar los sucesos $\overline{A \cup B}$ o $\overline{A \cap B}$. De ahí la importancia de las Leyes de Morgan. Por ejemplo, supongamos los sucesos “ser hombre” (H) y “estar casado/a” (C). Supongamos que se desea obtener el complementario de “ser hombre o estar casado/a”: $\overline{H \cup C}$. El resultado es “ser mujer soltera”. Pero esto no es tan intuitivo. Recurriendo a las Leyes de Morgan se tiene que $\overline{H \cup C} = \overline{H} \cap \overline{C}$. Interpretemos ahora el suceso $\overline{H} \cap \overline{C}$. Por un lado, \overline{H} es el suceso “no ser hombre”, o sea, “ser mujer”. Por otro lado \overline{C} es el suceso “no estar casado/a”, o lo que es lo mismo, “ser soltero/a”. Por tanto $\overline{H} \cap \overline{C}$ es el suceso “ser mujer y soltera”, tal y como se quería. Otras propiedades de las operaciones con sucesos son:

- **Conmutativas:** $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
- **Asociativas:** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- **Distributivas:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Resuelve tú:

Consideremos, entre los habitantes de un municipio, los sucesos $A = \{\text{ser socio del casino}\}$, $B = \{\text{ser socio del club de fútbol local}\}$ y $C = \{\text{ser socio de alguna asociación juvenil}\}$.

- a) Expresa en función de A , B y C las siguientes situaciones:
- a) Ser socio de alguna de esas asociaciones.
 - b) Ser socio de las tres asociaciones.
 - c) Ser socio del casino solamente.
 - d) Ser socio de, como máximo, una o dos asociaciones.
 - e) No ser socio de ninguna de las tres.
 - f) Ser socio de una sola asociación.

b) Describe el significado de los siguientes sucesos:

a) $A \cup B \cup C$

b) $\overline{A \cup B \cup C}$

c) $A \cup B - C$

d) $\overline{A \cap B \cap C}$

e) $C - (A \cup B)$

f) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

2. Probabilidad

La probabilidad es la medida de la incertidumbre de un suceso aleatorio. La probabilidad es un número que indica las posibilidades que tiene de verificarse ese suceso al realizar el experimento aleatorio. Estas ideas se sintetizan en la conocida Regla de Laplace, que asigna la probabilidad a cualquier suceso A , de acuerdo con el siguiente criterio:

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables a que ocurra el suceso } A}{\text{Total de casos posibles del experimento}}$$

Esta ley sólo es aplicable cuando los sucesos elementales son (se suponen *a priori*), por razones de simetría u homogeneidad, **equiprobables** (de igual probabilidad).

Ejemplo: En el lanzamiento de dos dados el total de casos posibles son 36. Expresando por (n, m) el resultado de una tirada, donde n es lo que sale en el primer dado y m lo que sale en el segundo, podemos escribir el espacio muestral de la siguiente manera:

$$E = \{ \begin{array}{cccccc} (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & (1, 4) & (1, 5) & (1, 6) \\ (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & (2, 4) & (2, 5) & (2, 6) \\ (3, 1) & (3, 2) & (3, 3) & (3, 4) & (3, 5) & (3, 6) \\ (4, 1) & (4, 2) & (4, 3) & (4, 4) & (4, 5) & (4, 6) \\ (5, 1) & (5, 2) & (5, 3) & (5, 4) & (5, 5) & (5, 6) \\ (6, 1) & (6, 2) & (6, 3) & (6, 4) & (6, 5) & (6, 6) \end{array} \}$$

Si los dados están correctamente contruidos, los sucesos elementales (n, m) serían todos equiprobables. Entonces:

- Si llamamos A al suceso “salir ambas caras números pares” tendríamos que $P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$, pues los casos favorables a que ocurra el suceso A son 9:

$$A = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$$

- Si llamamos B al suceso “la suma de las caras es igual a 9” entonces $P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, ya que ahora los casos favorables a que ocurra el suceso B son 4:

$$A = \{(3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4)\}$$

Resuelve tú:

En el experimento consistente en lanzar tres monedas, halla la probabilidad de los siguientes sucesos: A : “sacar más caras que cruces”, B : “sacar al menos una cruz” y C : “sacar como máximo dos cruces”.

2.1. Definición axiomática

De una manera formal, la probabilidad puede definirse diciendo que: es una función P que asigna a cada suceso un número real, debiendo cumplirse las siguientes condiciones:

1. Ese número está entre 0 y 1. Esto es, para cualquier suceso A : $0 \leq P(A) \leq 1$
2. La probabilidad de E (el espacio muestral o suceso seguro) es 1: $P(E) = 1$
3. Si A y B son sucesos incompatibles, es decir, si $A \cap B = \emptyset$, entonces: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Las dos consecuencias más importantes de esta definición son:

- a) Probabilidad del complementario de un suceso A :

$$\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$$

Demostración. Sabemos que A y \bar{A} son incompatibles ($A \cap \bar{A} = \emptyset$), luego por el punto 3 de la definición axiomática $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$. Además, por el punto 2, $P(E) = 1$. Entonces: $A \cup \bar{A} = E \Rightarrow P(A \cup \bar{A}) = P(E) \Rightarrow P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, tal y como queríamos demostrar.

- b) Probabilidad de la diferencia de dos sucesos:

$$\boxed{P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)}$$

Demostración. El suceso A es la unión de $A - B$ y $A \cap B$, es decir, $A = (A - B) \cup (A \cap B)$. Además los sucesos $A - B$ y $A \cap B$ son incompatibles, pues su intersección es vacía (véase la figura 2(b)). Entonces $P(A) = P((A - B) \cup (A \cap B)) \Rightarrow P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \Rightarrow P(A) - P(A \cap B) = P(A - B) \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$, tal y como se quería demostrar.

c) Para dos sucesos cualesquiera A y B se tiene:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Demostración. $A \cup B$ es a su vez la unión de tres sucesos incompatibles dos a dos: $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$ (véase otra vez la figura 2). Entonces $P(A \cup B) = P((A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, tal y como queríamos demostrar.

Ejemplo: Supongamos que son conocidas las probabilidades de los sucesos A , B y $A \cup B$, asociados a un experimento aleatorio: $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{2}{5}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{15}$. Con estos datos es posible calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:

- Que se cumplan alguno de los dos sucesos A o B .

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

- Que no se cumpla A y sí B .

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B \cap \bar{A}) = P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = \frac{2}{5} - \frac{1}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

- Que se cumpla uno de los dos solamente.

Se debe excluir la intersección para que se cumpla uno de los dos solamente. Por tanto este es el suceso $(A - B) \cup (B - A)$: $P((A - B) \cup (B - A)) = P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

- Que no se cumpla ni A ni B .

Este suceso es $\bar{A} \cap \bar{B}$ que, por las Leyes de Morgan es igual a $\overline{A \cup B}$. Entonces $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

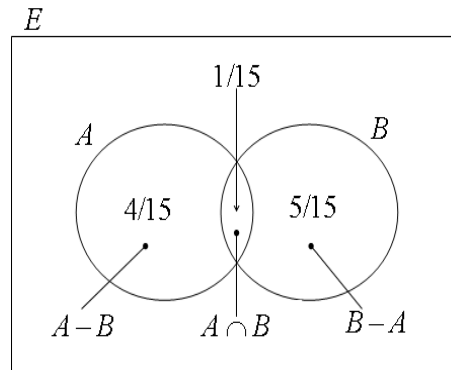


Figura 3: Probabilidades de los sucesos del ejemplo anterior

Resuelve tú:

Un estudiante hace dos pruebas en un mismo día. La probabilidad de que pase la primera es 0,6, la probabilidad de que pase la segunda es 0,8 y la de que pase ambas es 0,5. Se pide:

- Probabilidad de que pase al menos una prueba.
- Probabilidad de que no pase ninguna prueba.
- Probabilidad de que pase la primera pero que no pase la segunda.
- Probabilidad de que pase exactamente una.

3. Experimentos compuestos. Diagramas de árbol

Ya vimos que cuando un experimento aleatorio consiste en la realización de dos o más experiencias simples, éste se llama experimento compuesto. Este tipo de experiencias son numerosas.

El espacio muestral del experimento compuesto se obtiene a partir de los espacios muestrales de los experimentos simples que lo componen. Recibe el nombre de *espacio compuesto* o *espacio producto*.

El cálculo de probabilidades de los sucesos que ocurren en los experimentos compuestos se efectúa en función de las probabilidades de los sucesos elementales de las experiencias simples que forman el experimento aleatorio. Es importante entonces tener en cuenta el siguiente resultado:

La probabilidad de un suceso elemental de un espacio compuesto puede calcularse multiplicando las probabilidades de los sucesos elementales de las experiencias simples que conforman la experiencia compuesta.

Ejemplos:

- Supongamos que en el experimento “lanzar tres monedas” se desea calcular la probabilidad de que en un lanzamiento salgan tres caras. En el experimento simple, “lanzar una moneda”, la probabilidad de que salga cara es $P(C) = \frac{1}{2}$. Por tanto en el experimento compuesto “lanzar tres monedas” la probabilidad de que salgan tres caras es $P(CCC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Merece la pena resaltar que esta forma de proceder es más cómoda que buscar el espacio muestral del experimento compuesto: $E = \{CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX\}$ y luego aplicar la Regla de Laplace (obsérvese que, evidentemente, sólo hay un caso favorable de entre los ocho posibles): $P(CCC) = \frac{1}{8}$.
- Dos personas A y B, organizan el siguiente juego: tiran un dado tres veces. Si sale algún 1, gana A. Si no sale ningún 1, gana B. ¿Cuál de las dos personas tiene más probabilidad de ganar?

Solución:

Calculamos las probabilidades de ganar de cada una de las personas. Las probabilidades asociadas a cada una de las tiradas pueden verse en el diagrama de árbol de la figura 4. La probabilidad de que no salga el número 1 al tirar un dado es $\frac{5}{6}$, y la probabilidad de que no salga ningún 1 al tirar el dado tres veces es $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^3$

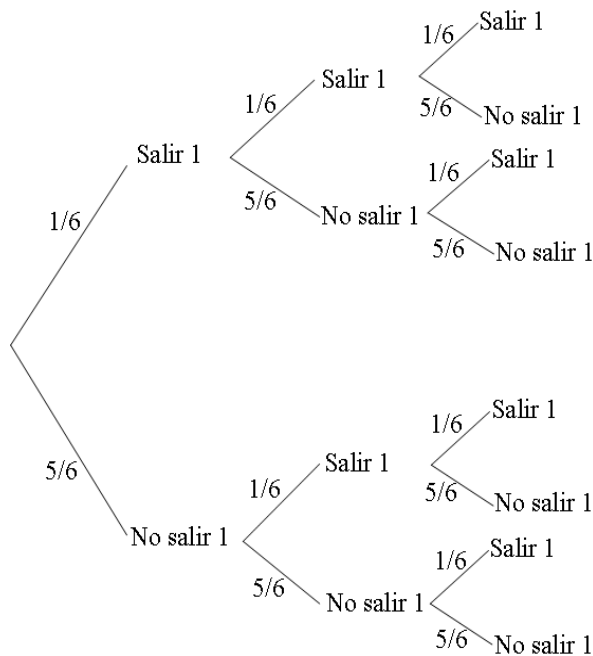


Figura 4: Diagrama de árbol

De esta forma tenemos que:

La probabilidad de que gane B es $P(\text{no salir ningún 1}) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0,5787$

La probabilidad de que gane A es $P(\text{salir algún 1}) = 1 - P(\text{no salir ningún 1}) = 1 - 0,5787 = 0,4213$

Se observa pues que tiene más probabilidades de ganar el jugador B.

- Una casa tiene dos escaleras. La escalera A tiene 10 pisos, en cuatro de ellos hay joyas; en la escalera B, cinco pisos tienen joyas y cinco no. Un ladrón entra al azar en una de las escaleras y luego en uno de los pisos. ¿Cuál es la probabilidad de que entre en un piso con joyas?

Solución:

Teniendo en cuenta el diagrama de árbol de la figura 5, con las probabilidades que aparecen en sus ramas, se obtiene la probabilidad siguiente:

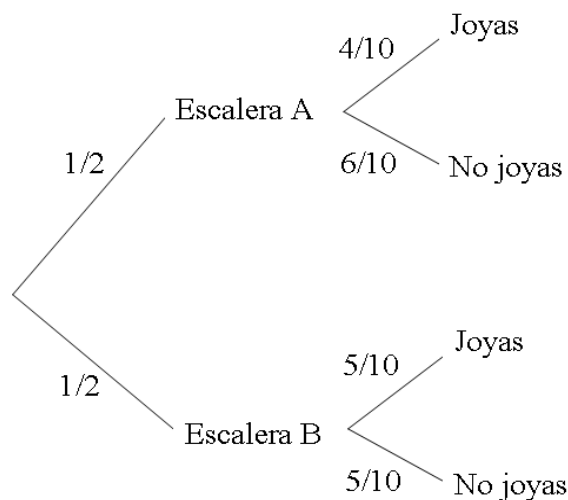


Figura 5: Otro diagrama de árbol

$$P(\text{joyas}) = P(\text{joyas en escalera A}) + P(\text{joyas en escalera B}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{10} = \frac{4}{20} + \frac{5}{20} = \frac{9}{20} = 0,45$$

4. Probabilidad condicionada

La probabilidad de un suceso A puede verse alterada si la información de que disponemos se incrementa, reduciendo, de este modo, la incertidumbre inherente al experimento aleatorio. Este incremento de información se traduce en una disminución de los casos posibles, aumentando, por tanto, la probabilidad de A .

Como ejemplo, volvamos otra vez al experimento aleatorio consistente en lanzar tres monedas, cuyo espacio muestral es $E = \{CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX\}$. Consideremos el suceso $A = \{\text{sacar dos caras}\}$, cuya probabilidad es $P(A) = \frac{3}{8}$ (3 casos favorables de 8 posibles). Supongamos por un momento que, en esa tirada, disponemos de una información adicional: ha salido al menos una cruz. Entonces los casos posibles se reducen a siete (todos menos el CCC). Por tanto, ahora, la probabilidad del suceso $A = \{\text{sacar dos caras}\}$ sabiendo que a ocurrido $B = \{\text{ha salido al menos una cruz}\}$ (al que llamamos *suceso A condicionado por B* y se escribe A/B), es: $P(A/B) = \frac{3}{7}$. Observa que 3 son los casos comunes a A y a B , esto es, favorables a $A \cap B$, siendo entonces $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$. Por otra parte $P(B) = \frac{7}{8}$. Y como la probabilidad del suceso A/B es el cociente entre casos favorables y caso posibles se tiene que:

$$P(A/B) = \frac{3}{7} = \frac{3/8}{7/8} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Esto sugiere definir la probabilidad condicionada de un suceso A por otro B , como:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$$

Del mismo modo:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) \neq 0$$

Ejemplo: Supongamos que en un Instituto de Secundaria hay 500 alumnos de Bachillerato, y que se distribuyen, por cursos y modalidades, según se muestra en la siguiente tabla:

| | Curso 1º | Curso 2º | Total |
|--------------------|----------|----------|-------|
| Tecnológico | 80 | 60 | 140 |
| Ciencias Sociales | 100 | 90 | 190 |
| Ciencias Naturales | 85 | 85 | 170 |
| Total | 265 | 235 | 500 |

Si designamos por T , S , N los sucesos consistentes en cursar Bachillerato Tecnológico, de Ciencias Sociales o de Ciencias Naturales, respectivamente, y por I y II ser de primero o segundo curso, se tiene:

$$P(T) = \frac{140}{500} \quad P(S) = \frac{190}{500} \quad P(N) = \frac{170}{500}$$

Mientras que las mismas probabilidades condicionadas por ser de primer curso serán:

$$P(T/I) = \frac{80}{265} \quad P(S/I) = \frac{100}{265} \quad P(N/I) = \frac{85}{265}$$

Obsérvese que, en todos los casos, es válida la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$P(T/I) = \frac{P(T \cap I)}{P(I)} = \frac{80/500}{265/500} = \frac{80}{265}$$

$$P(S/I) = \frac{P(S \cap I)}{P(I)} = \frac{100/500}{265/500} = \frac{100}{265}$$

$$P(N/I) = \frac{P(N \cap I)}{P(I)} = \frac{85/500}{265/500} = \frac{85}{265}$$

Análogamente se puede comprobar, por ejemplo, que (es conveniente interpretar cada una de las probabilidades condicionadas):

$$P(T/II) = \frac{60}{235} \quad P(II/T) = \frac{60}{140} \quad P(I/S) = \frac{100}{190}$$

4.1. Probabilidad de la intersección de sucesos

La fórmula de la probabilidad condicionada permite determinar una expresión sencilla para hallar $P(A \cap B)$, pues de la fórmula de la probabilidad condicionada $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ se deduce, despejando, que:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A)$$

Para la intersección de tres sucesos se tendría:

$$P(A \cap B \cap C) = P((A \cap B) \cap C) = P(A \cap B)P(C/A \cap B) = P(A)P(B/A)P(C/A \cap B)$$

Por tanto:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B/A)P(C/A \cap B)$$

Generalizando, para n sucesos:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Ejemplo: Un opositor se sabe 35 temas de los 50 de que consta el temario. La prueba consiste en responder a tres temas elegidos al azar. Calcula qué probabilidad tiene de superar la oposición si para ello hay que contestar correctamente a los tres temas.

Solución:

Supongamos que en la oposición salen, una vez realizado el sorteo, los temas A , B y C . Para aprobar hay que contestar correctamente a los tres temas: suceso $A \cap B \cap C$.

De contestar correctamente al tema A tiene 35 opciones de 50: $P(A) = \frac{35}{50}$.

Una vez contestado correctamente al tema A , de contestar correctamente al tema B tiene 34 opciones entre los 49 temas que restan: $P(B/A) = \frac{34}{49}$ (obsérvese que esta probabilidad es la de contestar correctamente al tema B sabiendo que se ha contestado correctamente al tema A).

Si ya ha contestado correctamente a los temas A y B , de contestar correctamente al tema C tiene 33 opciones entre los 48 temas que restan: $P(C/A \cap B) = \frac{33}{48}$.

Entonces, la probabilidad de contestar correctamente a los tres temas es:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B/A)P(C/A \cap B) = \frac{35}{50} \cdot \frac{34}{49} \cdot \frac{33}{48} = \frac{39270}{117600} \approx 0,334$$

5. Independencia de sucesos

La finalidad de la probabilidad condicionada es recoger la influencia que puede ejercer un suceso sobre otro. Si esta influencia no existiera, se habla de *independencia* de los sucesos. En consecuencia, se dice que *un suceso A es independiente de otro B* si $P(A/B) = P(A)$, es decir, la presencia de B no influye en la probabilidad de que A ocurra o no.

En este caso, de acuerdo con la definición de probabilidad condicionada, $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, la igualdad $P(A/B) = P(A)$ se puede escribir: $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$. Despejando $P(A \cap B)$:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

Además, si A es independiente de B , la probabilidad condicionada del suceso B/A es $P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A)}{P(A)} = P(B)$, con lo que $P(B/A) = P(B)$, lo que significa que B es independiente de A . En consecuencia, la independencia entre dos sucesos exige la reciprocidad entre ambos, es decir, si A es independiente de B , entonces B es independiente de A y viceversa.

Obsérvese por tanto que si los sucesos A y B son independientes las igualdades $P(A/B) = P(A)$, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ y $P(B/A) = P(B)$, son equivalentes.

Teorema 5.1. *La independencia se conserva con la operación de complementariedad. Es decir, si A y B son sucesos independientes, entonces:*

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B})$$

Demostración:

Partiendo de que A y B son sucesos independientes, se trata de comprobar que los sucesos \bar{A} y \bar{B} también lo son. Esto es, de $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, hay que concluir que $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B})$. En efecto: $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = 1 - P(A) - P(B)(1 - P(A)) = P(\bar{A}) - P(B)P(\bar{A}) = P(\bar{A})(1 - P(B)) = P(\bar{A})P(\bar{B})$, tal y como se quería demostrar.

(Es conveniente que se intenten justificar, pensando en la propiedad correspondiente, cada uno de los pasos que se han dado en esta demostración.)

La independencia de tres o más sucesos se caracteriza como sigue:

- Si los sucesos A , B y C son independientes, entonces

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

Sin embargo, no es cierto el recíproco, como ocurría para dos sucesos. Esto es, de $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ no se concluye necesariamente que A , B y C sean independientes. Para ello es necesario comprobar que son *independientes dos a dos*, esto es:

- ✓ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- ✓ $P(A \cap C) = P(A)P(C)$
- ✓ $P(B \cap C) = P(B)P(C)$

- En general, si los sucesos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ son independientes, entonces:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \cdots P(A_n)$$

Como antes, esa igualdad no bastaría para asegurar la independencia de los n sucesos; habría que compararlos dos a dos, tres a tres, \dots , n a n .

Ejemplo: Un tirador tiene una probabilidad de 0,8 de dar en el blanco. Si realiza tres disparos, calcula la probabilidad de haber hecho diana:

- a) Con algún disparo.
- b) Con dos disparos.

Solución:

Llamemos A, B y C a los sucesos “haber hecho blanco en los disparos 1º, 2º ó 3º”. Estos sucesos son independientes, así como sus complementarios (no haber hecho blanco): \bar{A}, \bar{B} y \bar{C} .

- a) El suceso fallar los tres disparos viene representado por $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$. Hallemos su probabilidad:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = (1 - 0,8)(1 - 0,8)(1 - 0,8) = 0,008$$

Haber hecho diana con algún disparo es el suceso contrario de haber fallado los tres, por lo que $P(\text{acertar con algún disparo}) = 1 - 0,008 = 0,992$

- b) Haber hecho diana con dos disparos es el suceso $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$, cuya probabilidad será: $P((A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)) = P(A \cap B \cap \bar{C}) + P(A \cap \bar{B} \cap C) + P(\bar{A} \cap B \cap C) = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,384$

6. Probabilidad total

Con frecuencia, cuando se contempla la ocurrencia de un suceso, se han de analizar diversos escenarios en los que haya podido ocurrir, no siendo uno solo el responsable de su acaecimiento. Por ejemplo, un accidente de automóvil puede ocurrir como consecuencia de conducir ebrio, de que ha llovido, de que hay niebla, etc.; y también no ocurrir, aun dándose algunas de esas circunstancias.

En general, un suceso B , de un espacio muestral E , puede depender de otros n sucesos A_i , $i = 1, 2, \dots, n$, incompatibles entre sí y tales que su unión sea el espacio muestral E .

Esto es: $A_i \cap A_j = \emptyset$ y $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$

Entonces, como $B = B \cap E$, se tiene que $B = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)$, y como los sucesos $B \cap A_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, son también incompatibles entre sí, se puede escribir $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$

Teniendo en cuenta, por la probabilidad condicionada, que $P(B \cap A_i) = P(A_i)P(B/A_i)$, se concluye que:

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + \dots + P(A_n)P(B/A_n)$$

Igualdad que nos presenta la probabilidad del suceso B , recogiendo, a través de los A_i , todas las posibles circunstancias que se pudieran presentar condicionando al suceso. Tal igualdad se conoce con el nombre de *probabilidad total* del suceso.

Ejemplo: En cierta población, un 20% de los trabajadores lo hace en la agricultura (A), un 25% en la industria (I) y el resto en el sector servicios (S). Un 63% de los que trabajan en el campo son mayores de 45 años, siendo ese porcentaje del 38% y el 44% en los otros sectores. Seleccionando un trabajador al azar, ¿qué probabilidad hay de que tenga menos de 45 años?

Solución:

Las probabilidades de A , I y S son: $P(A) = 0,2$; $P(I) = 0,25$; $P(S) = 0,55$. Llamemos +45 y -45 a los sucesos “tener más o menos de 45 años”, respectivamente.

Como los porcentajes de trabajadores menores de 45 años en la agricultura, -45/ A , industria, -45/ I , y servicios, -45/ S , son el 37%, 62% y 56% respectivamente, se tiene que: $P(-45/A) = 0,37$; $P(-45/I) = 0,62$; $P(-45/S) = 0,56$. Con esto, la probabilidad de que la persona elegida tenga menos de 45 años es:

$$P(-45) = P(A)P(-45/A) + P(I)P(-45/I) + P(S)P(-45/S) = 0,2 \cdot 0,37 + 0,25 \cdot 0,62 + 0,55 \cdot 0,56 = 0,074 + 0,155 + 0,308 = 0,537$$

7. Teorema de Bayes

El cálculo de la probabilidad total de un suceso hace fijar la atención en los diversos medios que se manifiestan influyendo en él. Pero podemos invertir nuestro interés y, ante la presencia del suceso, investigar por la probabilidad de que se haya desarrollado en uno u otro escenario.

Se trata, suponiendo los sucesos A_i , $i = 1, 2, \dots, n$, formando un sistema completo de sucesos y B el suceso que se realiza, de hallar las probabilidades $P(A_i/B)$, $i = 1, 2, \dots, n$

Tal probabilidad se puede calcular teniendo en cuenta que, por la fórmula de la probabilidad condicionada, se cumple:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \quad \text{y} \quad P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B/A_i)$$

Luego,

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(B)}$$

La probabilidad $P(B)$ se puede hallar mediante la probabilidad total, vista en la sección anterior:

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + \dots + P(A_n)P(B/A_n)$$

Entonces:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + \dots + P(A_n)P(B/A_n)}$$

Esta expresión se conoce con el nombre de *fórmula de Bayes* y pone de manifiesto la relación entre las probabilidades $P(A_i)$, llamadas *a priori* por formularse antes de la presencia del suceso B, y las probabilidades $P(A_i/B)$, obtenidas *a posteriori*, pues su cálculo se realiza después de contar con una información adicional suministrada por aquel suceso.

Ejemplos:

- En las condiciones del ejemplo anterior, si sabemos que un trabajador es menor de 45 años podemos preguntarnos: ¿qué probabilidad hay de que proceda de cada uno de los sectores agrícola, industrial y servicios? Es decir, hallar $P(A/-45)$, $P(I/-45)$ y $P(S/-45)$.

Solución:

Anteriormente se ha obtenido que $P(-45) = 0,537$, por tanto:

$$\checkmark P(A/-45) = \frac{P(A)P(-45/A)}{P(-45)} = \frac{0,2 \cdot 0,37}{0,537} \approx 0,1378$$

$$\checkmark P(I/-45) = \frac{P(I)P(-45/I)}{P(-45)} = \frac{0,25 \cdot 0,62}{0,537} \approx 0,28864$$

$$\checkmark P(S/-45) = \frac{P(S)P(-45/S)}{P(-45)} = \frac{0,55 \cdot 0,56}{0,537} \approx 0,57356$$

- Tres máquinas, M_1 , M_2 y M_3 , producen el 45 %, 30 % y 25 %, respectivamente, del total de las piezas producidas en una fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son del 3 %, 4 % y 5 %.
 - a) Seleccionamos una pieza al azar. Calcula la probabilidad de que sea defectuosa.
 - b) Tomamos, al azar, una pieza y resulta ser defectuosa. Calcula la probabilidad de haber sido producida por la máquina M_2 .
 - c) ¿Qué máquina tiene la mayor probabilidad de haber producido la citada pieza defectuosa?

Solución:

Sea D el suceso “la pieza es defectuosa” y N el suceso “la pieza no es defectuosa”. La información del problema puede expresarse en el diagrama de árbol de la figura siguiente, donde se ha llamado D el suceso “la pieza es defectuosa” y N al suceso “la pieza no es defectuosa”:

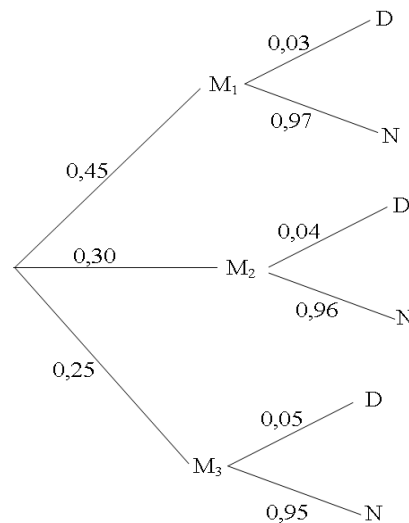


Figura 6: Diagrama de árbol de la producción de piezas

- a) Para calcular la probabilidad de que la pieza elegida sea defectuosa, $P(D)$, por la probabilidad total, $P(D) = P(M_1)P(D/M_1) + P(M_2)P(D/M_2) + P(M_3)P(D/M_3) = 0,45 \cdot 0,03 + 0,30 \cdot 0,04 + 0,25 \cdot 0,05 = 0,038$
- b) Debemos calcular $P(M_2/D)$. Por el teorema de Bayes:

$$\begin{aligned}
 P(M_2/D) &= \frac{P(M_2)P(D/M_2)}{P(M_1)P(D/M_1) + P(M_2)P(D/M_2) + P(M_3)P(D/M_3)} = \\
 &= \frac{0,30 \cdot 0,04}{0,45 \cdot 0,03 + 0,30 \cdot 0,04 + 0,25 \cdot 0,05 = 0,038} = \frac{0,012}{0,038} \cong 0,3156
 \end{aligned}$$

- c) Calculamos $P(M_1/D)$ y $P(M_3/D)$, comparándolas con el valor de $P(M_2/D)$ ya calculado. Aplicando el teorema de Bayes, obtenemos:

$$P(M_1/D) = \frac{0,45 \cdot 0,03}{0,45 \cdot 0,03 + 0,30 \cdot 0,04 + 0,25 \cdot 0,05 = 0,038} = \frac{0,0135}{0,038} \cong 0,3553$$

$$P(M_3/D) = \frac{0,25 \cdot 0,05}{0,45 \cdot 0,03 + 0,30 \cdot 0,04 + 0,25 \cdot 0,05 = 0,038} = \frac{0,0125}{0,038} \cong 0,3289$$

La máquina con mayor probabilidad de haber producido la pieza defectuosa es M_1 .

8. Ejercicios

1. El 70 % de las empresas tienen errores en sus activos financieros, el 60 % tienen errores en sus pasivos financieros y el 40 % tienen errores en sus activos y en sus pasivos financieros. Obtén razonadamente el porcentaje de empresas sin errores en sus activos, en sus pasivos o en ambos. De una muestra de 500 empresas, ¿cuántas se espera que no tengan errores ni en sus activos ni en sus pasivos financieros?

Solución: 30 %; 40 %; 10 %; 50 empresas sin errores ni en activos ni en pasivos.

2. Un jugador de fútbol, especialista en lanzar penalties, mete 4 de cada 5 que tira. Para los próximos tres penalties se consideran los siguientes sucesos: $A = \{\text{mete sólo uno de ellos}\}$, $B = \{\text{mete dos de los tres}\}$ y $C = \{\text{mete el primero}\}$. Halla la probabilidad de los sucesos $A \cup B$, $A \cap C$ y $B \cap C$.

Solución: $\frac{60}{125}$, $\frac{4}{125}$, $\frac{32}{125}$

3. En una clase infantil hay 6 niñas y 10 niños. Si se escoge a 3 alumnos al azar, halla la probabilidad de:

- a) Seleccionar 3 niños.
- b) Seleccionar 2 niños y una niña.
- c) Seleccionar, al menos, un niño.

Solución: a) $\frac{3}{14}$, b) $\frac{27}{56}$, c) $\frac{27}{28}$

4. Si los sucesos A y B son independientes y compatibles, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

- a) $P(A \cap B) = P(B)$
- b) $P(B \cup A) = P(A) + P(B)$
- c) $P(\bar{A}/B) = P(\bar{A})$

Solución: a) No es cierta, salvo que $P(A) = 1$, b) No es cierta, c) Sí es cierta.

5. Dos niños escriben en un papel una vocal cada uno, ¿cuál es la probabilidad de que sea la misma?

Solución: $\frac{1}{5}$

6. Se ha comprobado que el 48 % de los alumnos de Bachillerato de cierta región son aficionados a la música clásica y a la pintura, y que el 60 % de los aficionados a la pintura también son aficionados a la música clásica. Si se elige al azar un alumno de Bachillerato de esa región, ¿qué probabilidad hay de que no sea aficionado a la pintura?

Solución: 0,2

7. En una clase hay 12 alumnos y 16 alumnas. El profesor saca a 4 a la pizarra.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que todas sean alumnas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que todos sean alumnos?

Solución: a) 0,089, b) 0,024

8. En una muestra de 1000 personas hay 300 que saben inglés, 100 que saben ruso y 50 ambos idiomas. Con estos datos averigua si son independientes o no los sucesos “saber inglés” y “saber ruso”.

Solución: No son independientes.

9. La probabilidad de que un niño, cuando sea mayor, estudie una carrera universitaria es $\frac{1}{6}$, y en el caso de una niña es $\frac{1}{10}$. Si se toman al azar un niño y una niña, calcula las probabilidades siguientes:

a) Que los dos estudien una carrera universitaria.

b) Que ninguno de ellos estudie una carrera universitaria.

c) Que al menos uno de ellos estudie una carrera universitaria.

Solución: a) $\frac{1}{60}$, b) $\frac{45}{60}$, c) $\frac{15}{60}$

10. Juan y Pedro lanzan una pelota a un blanco. La probabilidad de que Juan dé en el blanco es $\frac{1}{3}$ y la probabilidad de que dé Pedro es $\frac{1}{4}$. Supóngase que Juan lanza primero y que los dos chicos se van turnando para lanzar:

a) Calcula la probabilidad de que el primer lanzamiento que dé en el blanco sea el segundo de Juan.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que Juan dé en el blanco antes de que lo haga Pedro?

Solución: a) $\frac{1}{6}$, b) $\frac{2}{3}$

11. Estudiando un determinado colectivo de personas resulta que: 2 de cada 5 son morenas, y 3 de cada 9 tienen los ojos azules, teniendo el resto los ojos de distinto color al azul. Calcula las siguientes probabilidades:

a) Que una persona sea morena y tenga los ojos azules.

b) Que una persona sea morena o no tenga los ojos azules.

c) Que tres personas sean morenas.

d) Que dos personas sean morenas o tengan los ojos azules

Solución: a) $\frac{2}{15}$, b) $\frac{12}{15}$, c) $\frac{8}{125}$, d) $\frac{57}{225} = \frac{19}{75}$

12. En una clase, un 40 % de alumnos aprobaron filosofía, y un 50 % matemáticas. Se sabe que la probabilidad de aprobar filosofía si se ha aprobado matemáticas es 0,6.

a) ¿Qué porcentaje de alumnos aprobaron ambas asignaturas?

b) De los alumnos que aprobaron filosofía ¿qué porcentaje aprobó matemáticas?

Solución: a) 30 %, b) 75 %

13. Para la señalización de emergencia de un hospital se han instalado dos indicadores que funcionan independientemente. La probabilidad de que el indicador A se accione durante la avería es de 0,99, mientras que para el indicador B, la probabilidad es de 0,95:

a) Calcula la probabilidad de que durante una avería se accione un solo indicador.

b) Calcula la probabilidad de que durante una avería no se accione ninguno de los dos indicadores.

Solución: a) 0,059, b) 0,0005

14. En 1994, en España, el 51,6 % de la población en edad laboral (16 - 65 años) son mujeres y el 48,4 % son hombres. De ellos, están en el paro el 31,4 % de las mujeres y el 19,8 de los hombres. Elegida al azar una persona en edad laboral, ¿cuál es la probabilidad de que esté en el paro?

Solución: 0,258

15. Una urna contiene 5 bolas rojas y 8 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por 2 del otro color. A continuación se extrae una segunda bola. Se pide:

a) Probabilidad de que la segunda bola sea verde.

b) Probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color.

Solución: a) 0,582, b) 0,418

16. Dos profesores comparten un número de teléfono. De las llamadas que llegan, $\frac{2}{5}$ son para el profesor A y $\frac{3}{5}$ son para el profesor B. Sus ocupaciones docentes les alejan de este teléfono, de modo que A está fuera el 50 % del tiempo y B el 25 %. Calcula la probabilidad de estar presente un profesor cuando le llamen.

Solución: 0,65

17. Una bolsa contiene 3 monedas, una de las cuales está acuñada con 2 caras, mientras que las otras dos son normales. Se escoge una moneda al azar y se lanza sucesivamente 4 veces, obteniéndose 4 caras. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda elegida sea la de 2 caras? Razona la respuesta.

Solución: $\frac{8}{9}$

18. El despertador de Javier no funciona muy bien, pues el 20 % de las veces no suena. Cuando suena, Javier llega tarde a clase con probabilidad 0,2, pero si no suena, la probabilidad de que llegue tarde es 0,9.
- a) Determina la probabilidad de que llegue tarde a clase y haya sonado el despertador.
 - b) Determina la probabilidad de que llegue temprano.
 - c) Javier ha llegado tarde a clase, ¿cuál es la probabilidad de que haya sonado el despertador?

Solución: a) 0,16, b) 0,66, c) 0,47

19. En una universidad en la que no hay más que estudiantes de ingeniería, ciencias y letras, acaban la carrera el 5 % de ingeniería, el 10 % de ciencias y el 20 % de letras. Se sabe que el 20 % estudian ingeniería, el 30 % ciencias y el 50 % letras. Tomado un estudiante cualquiera al azar, se pide:
- a) Probabilidad de que haya acabado la carrera y sea de ingeniería.
 - b) Si se tiene la carrera terminada, ¿cuál es la probabilidad de que sea de ingeniería?

Solución: a) 0,01, b) 0,071

20. Una fábrica produce tres tipos diferentes de bolígrafos, A, B y C. El número total de unidades producidas de cada uno de ellos es el mismo (un tercio del total). Salen defectuosos, sin embargo, un 15 por mil de todos los del tipo A, un 3 por mil de todos los del tipo B y un 7 por mil de todos los del tipo C. En un control de calidad se detectan el 70 % de todos los bolígrafos defectuosos del tipo A, el 80 % de los del tipo B y el 90 % de los del tipo C. Los bolígrafos defectuosos en dicho control se tiran. Si se saca al azar uno de estos bolígrafos defectuosos que se han tirado, calcula la probabilidad de que sea del tipo A.

Solución: 0,547

21. El 35 % de los créditos de un banco son para vivienda, el 50 % son para industria y el 15 % para consumo diverso. Resultan fallidos el 20 % de los créditos para vivienda, el 15 % de los créditos para industrias y el 70 % de los créditos para consumo. Calcula la probabilidad de que se pague un crédito elegido al azar.

Solución: 0,75

22. Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 blancas. Se selecciona una bola al azar, se descarta y se colocan 2 bolas de otro color en la urna. Luego se saca de la urna una segunda bola. Determina la probabilidad de que:
- a) La segunda bola sea roja.
 - b) Ambas bolas sean del mismo color.
 - c) La primera sea roja si la segunda lo es.

Solución: a) $\frac{41}{72}$, b) $\frac{26}{72}$, c) $\frac{20}{41}$

23. De los créditos concedidos por un banco, un 42 % lo son para clientes nacionales, un 33 % para clientes de la Unión Europea y un 25 % para individuos del resto del mundo. De esos créditos, son destinados a vivienda un 30 %, un 24 % y un 14 % según sean nacionales, de la Unión Europea o del resto del mundo. Elegido un cliente al azar, ¿qué probabilidad hay de que el crédito concedido no sea para vivienda?

Solución: 0,7598

24. En cierta empresa se producen dos bienes A y B en la proporción 3 a 4. La probabilidad de que un bien de tipo A tenga defecto de fabricación es del 3 %, y del tipo B, del 5 %. Se analiza un bien elegido al azar, y resulta correcto. ¿Qué probabilidad existe de que sea del tipo A?

Solución: 0,4337

25. Tenemos tres urnas: U_1 con 3 bolas rojas y 5 negras, U_2 con 2 bolas rojas y 1 negra y U_3 con 2 bolas rojas y 3 negras. Escogemos una urna al azar y extraemos una bola. Si la bola ha sido roja, ¿cuál es la probabilidad de haber sido extraída de la urna U_1 ?

Solución: 0,26

26. Se tiene una urna vacía y se lanza una moneda al aire. Si sale cara, se introduce en la urna una bola blanca y, si sale cruz, se introduce una bola negra. El experimento se repite tres veces y, a continuación, se introduce la mano en la urna, retirando una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que en la urna queden una bola blanca y otra negra?

Solución: $\frac{1}{2}$

27. En segundo de Bachillerato de cierto instituto hay un total de 100 estudiantes, de los cuales 40 son hombres, 30 usan gafas y 15 son hombres y usan gafas. Si seleccionamos al azar un estudiante de dicho curso:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y no use gafas?

b) Si sabemos que el estudiante seleccionado no usa gafas, ¿qué probabilidad hay de que sea hombre?

Solución: a) 0,45, b) 0,357

28. Una fábrica de coches tiene tres cadenas de producción: A, B y C. La cadena A fabrica el 50 % del total de coches producidos, la B el 25 % y la C el resto. Si la probabilidad de que un coche resulte defectuoso es de $\frac{1}{2}$ en la cadena A, de $\frac{1}{4}$ en la cadena B y de $\frac{1}{6}$ en la cadena C, calcula:

a) La probabilidad de que un coche sea defectuoso y haya sido fabricado por la cadena A.

b) La probabilidad de que un coche haya sido producido por la cadena C si éste no es defectuoso.

Solución: a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{10}{31} \approx 0,32$

29. Elvira se sabe 18 unidades de las 22 de que consta el libro de Geografía. En un examen, por medio de bolas, se eligen dos unidades al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sepa las dos?

Solución: 0,662

30. En una urna hay tres bolas azules y cuatro verdes. Si se extraen simultáneamente dos bolas al azar, halla la probabilidad de que ambas bolas sean del mismo color.

Solución: 0,42857

31. Un cajón contiene cuatro calcetines negros, seis marrones y dos azules. Si se toman dos calcetines al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean negros? ¿Y la de que ambos sean del mismo color?

Solución: 0,09; 0,333

32. La probabilidad de que un ciclista gane una carrera en día lluvioso es 0,08 y la de que gane una carrera en día seco es 0,3. Si la probabilidad de que el día de la carrera sea lluvioso es 0,25, ¿cuál será la probabilidad de que el ciclista gane la carrera?

Solución: 0,245

33. Una librería tiene tres estantes con la siguiente composición: en el estante superior hay 3 novelas y 7 cuentos, en el estante central hay 8 novelas y 6 cuentos y en el inferior hay 5 novelas y 9 cuentos. Se escoge un estante al azar y se saca de él un libro. Si el libro ha resultado ser novela, ¿cuál es la probabilidad de que se haya sacado del estante central?

Solución: 0,465

34. En una ciudad el 35 % de los censados vota al partido A, el 45 % al partido B y el 20 % restante se abstiene. Se sabe, además, que el 20 % de los votantes del partido A, el 30 % de los votantes del partido B y el 15 % de los que se abstienen son mayores de 60 años. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un ciudadano censado, elegido al azar, sea mayor de 60 años?

b) Si dicho ciudadano es mayor de 60 años, ¿cuál es la probabilidad de que se haya abstenido en las elecciones?

Solución: a) 0,235, b) 0,1277

35. Una urna A contiene 6 bolas blancas y 4 negras, una segunda urna B contiene 5 bolas blancas y 2 negras. Se selecciona una urna al azar y de ella se extraen 2 bolas sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de que:

a) Las dos bolas sean blancas.

- b) Las dos bolas sean del mismo color.
- c) Las dos bolas sean de distinto color.

Solución: a) 0,40476, b) 0,4952, c) 0,5048

36. Un trabajador tiene que coger un determinado autobús para ir a su trabajo. Lo coge en el 80 % de los casos y en esa situación la probabilidad de llegar puntual al trabajo es 0,9. Si no lo coge, llega tarde el 50 % de las veces. Calcula:

- a) Si llega puntual, ¿cuál es la probabilidad de que haya cogido el autobús?
- b) Si llega tarde, ¿cuál es la probabilidad de que haya perdido el autobús?

Solución: a) 0,878, b) 0,555

37. Extraemos una carta de una baraja española; si sale figura, extraemos una bola de la urna I; en caso contrario, la extraemos de la urna II. Las urnas tienen la siguiente composición: urna I: 4 bolas blancas y 8 bolas verdes; urna II: 6 bolas verdes y 5 bolas rojas. Calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:

- a) La bola es verde y de la urna II.
- b) La bola es blanca.

Solución: a) 0,3818, b) 0,1

38. La probabilidad de que una persona adquiera en una librería un periódico es de 0,4. La probabilidad de que adquiera una revista es de 0,3. La probabilidad de que adquiera ambas publicaciones es de 0,2. Calcula las probabilidades de los siguientes casos:

- a) Que adquiera alguna publicación.
- b) Que no adquiera ninguna.
- c) Que adquiera sólo un periódico.

Solución: a) 0,5, b) 0,5, c) 0,2

39. Se lanzan 5 dados sobre una mesa. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan sólo números pares? ¿Y de salga al menos un seis?

Solución: 0,03125; 0,5981

40. De una baraja de 40 cartas se extraen tres naipes consecutivamente. Calcula la probabilidad de obtener la secuencia sota, caballo, rey.

Solución: 0,00107