

## TEMA 2: Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas es una expresión de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} . \text{ Las } \mathbf{incógnitas} \text{ son } x, y, z, \text{ los } \mathbf{coeficientes} \ a_{ij} \text{ y los } \mathbf{términos}$$

**independientes**  $b_j$  son números reales. Conocidos  $a_{ij}$  y  $b_j$ , un sistema queda totalmente determinado.

Una **solución del sistema** es una terna de valores  $(x_0, y_0, z_0)$  que al sustituirlos por  $x, y, z$  verifiquen **todas** las ecuaciones del mismo.

Si esta terna es única, decimos que el sistema es **determinado**; si pueden encontrarse infinitas ternas diremos que es **indeterminado** y si no existe ninguna (el sistema no tiene soluciones) diremos que es **incompatible**.

### Ø *Expresión matricial de un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas*

Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas se puede representar matricialmente de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

A la matriz  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  se le llama **matriz de los coeficientes** y a la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}, \text{ formada por los coeficientes y los términos independientes se le}$$

llama **matriz ampliada**.

Obsérvese que para construir la matriz ampliada el sistema tiene que estar dado con las incógnitas en el mismo orden en todas las ecuaciones, y los términos independientes en el lado derecho de las igualdades. Si el sistema no adopta la estructura anterior hemos de reestructurarlo hasta conseguir un sistema equivalente que sí la tenga.

### Ø *Método de Gauss para la resolución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas*

Se trata de convertir la matriz ampliada  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$  en otra de la forma

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & a'_{33} & b'_3 \end{pmatrix} \text{ mediante transformaciones elementales que pasamos a describir a}$$

continuación.

De esta forma conseguimos transformar el sistema  $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$  en otro

equivalente de la forma  $\begin{cases} a'_{11}x + a'_{12}y + a'_{13}z = b'_1 \\ a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2 \\ a'_{33}z = b'_3 \end{cases}$  muy sencillo de resolver, pues de la

tercera ecuación se despeja  $z$ , este valor se sustituye en la segunda ecuación y se despeja  $y$ , para que finalmente, sustituyendo estos dos valores ( $z$  e  $y$ ) en la primera ecuación, se despeje  $x$ .

### Ü **Transformaciones elementales de la matriz ampliada**

1. Hay que procurar que  $a_{11}$  sea distinto de cero. Si no lo es cambiamos de orden alguna fila o columna (que no sea la de los términos independientes) hasta conseguir que  $a_{11}$  sea distinto de cero.

2. Realizamos las operaciones siguientes:

a)  $[(2^{\text{a}} \text{ fila}) \times a_{11}] - [(1^{\text{a}} \text{ fila}) \times a_{21}]$

b)  $[(3^{\text{a}} \text{ fila}) \times a_{11}] - [(1^{\text{a}} \text{ fila}) \times a_{31}]$

**En general, si a una fila o columna le sumamos o restamos otra previamente multiplicada por un número, la matriz ampliada resultante da lugar a un sistema con las mismas soluciones que el original. Lo mismo ocurre si simplemente multiplicamos una fila por un número o cambiamos entre sí el orden de las filas.**

Con esto conseguimos transformar la matriz ampliada en otra de la forma:

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & b'_3 \end{pmatrix}.$$

Si  $a'_{22}$  fuera cero intercambiaríamos entre sí las filas segunda y tercera y el proceso finaliza. Caso de que  $a'_{32}$  fuera cero, el proceso también habría terminado y no seguiríamos por el paso número 3.

3. En esta última matriz hacemos la siguiente operación:

$$[(3^{\text{a}} \text{ fila}) \times a'_{22}] - [(2^{\text{a}} \text{ fila}) \times a'_{32}].$$

Así conseguimos transformar la matriz anterior en  $\begin{pmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} & b''_1 \\ 0 & a''_{22} & a''_{23} & b''_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & b''_3 \end{pmatrix}$ , tal y como

queríamos.

Una vez terminado el proceso se pueden presentar varios casos:

a) Que  $a''_{33}$  sea un número distinto de cero ( $b''_3$  puede ser cualquier número). En este caso existe solución y es única. El sistema será pues determinado.

- b) Que  $a'_{33}$  y  $b'_3$  sean ambos cero. Entonces existen infinitas soluciones. El sistema será indeterminado.
- c) Que  $a'_{33}$  valga cero, pero  $b'_3$  sea un número distinto de cero. Entonces no existe solución. El sistema es incompatible.



### Ejercicio de aplicación

- 1** Resolver los siguientes sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas utilizando el método de Gauss:

a) 
$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 6 \\ 3x + y - z = 2 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -x + 3y - z = -2 \\ 2x - y + 4z = 6 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} -3x + 2y - z = 0 \\ x - 2z = -1 \\ 2y - 7z = 3 \end{cases}$$

#### Solución:

a) La matriz ampliada es  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Como  $a_{11} = 2 \neq 0$  saltamos directamente

al paso 2. Multiplicamos la segunda fila por 2 y la primera por 3 y restamos. Multiplicamos también la tercera fila por 2 y la primera por  $-1$  y restamos.

Obtenemos así la siguiente matriz:  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -8 & -14 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ . Por último, tal y como nos

dice el paso 3, multiplicamos la tercera fila por 5 y la segunda fila por tres y

restamos, obteniendo:  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -8 & -14 \\ 0 & 0 & 24 & 72 \end{pmatrix}$ . El sistema asociado a esta matriz es:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 6 \\ 5y - 8z = -14 \\ 24z = 72 \end{cases}$$

. Despejando de la tercera ecuación se obtiene  $z = 3$ . Sustituyendo

este valor en la segunda tenemos que  $5y - 24 = -14$ , de donde  $y = 2$ . Sustituyendo por último los valores de  $y, z$  en la primera ecuación tenemos:  $2x - 2 + 6 = 6$ , de donde  $x = 1$ .

**b)** Matriz ampliada:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ . Hacemos  $[1 \times (2^{\text{a}} \text{ fila})] - [(-1) \times (1^{\text{a}} \text{ fila})]$  y

$[1 \times (3^{\text{a}} \text{ fila})] - [2 \times (1^{\text{a}} \text{ fila})]$ , obteniendo la siguiente matriz:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ . Por

último sumándole a la tercera fila la segunda, tenemos:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Estamos pues en el caso de un sistema indeterminado, es decir, con infinitas soluciones:  $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 5y+2z=2 \end{cases}$ . Las soluciones se calculan de la siguiente manera: a la

última incógnita, en este caso  $z$ , le damos un valor cualquiera arbitrario; por ejemplo  $z = a$  y sustituimos este valor en la segunda ecuación para despejar la incógnita y:  $5y+2a=2$ , de donde  $y = \frac{2-2a}{5}$ . Por último sustituimos los valores obtenidos

para  $z$  e  $y$  en la primera ecuación y despejamos  $x$ :  $x+2\frac{2-2a}{5}+3a=4$ , multiplicando los dos miembros de la igualdad por 5 se obtiene:

$5x+4-4a+15a=20$ , de donde  $5x=16-11a$  y por tanto  $x = \frac{16-11a}{5}$ .

**c)** La matriz ampliada es ahora:  $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ . Si multiplicamos la segunda fila

por 3 y se la sumamos a la primera nos queda:  $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & -3 \\ 0 & 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ . Restando ahora

a la tercera fila la segunda tenemos:  $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ . Esto significa que el

sistema no tiene solución, es decir, se trata de un sistema incompatible pues el

sistema asociado es:  $\begin{cases} -3x+2y-z=0 \\ 2y-7z=-3 \\ 0=6 \end{cases}$  y en el mismo la última ecuación ( $0z=6$ ) es

contradictoria pues 0 no es igual que 6.

**Ø Resolución de problemas**

En la **resolución de problemas** los sistemas se emplean con mucha frecuencia. Para el correcto planteamiento de estos problemas hay que:

1. Identificar las incógnitas. Darles nombre ( $x, y, z$  son los más usuales).
2. Establecer las relaciones entre ellas. (Quizá haya que leer el enunciado varias veces, hasta cerciorarse de la corrección del planteamiento).
3. Escribir el sistema de ecuaciones. Expresarlo en su forma estándar: incógnitas ordenadas y términos independientes en los segundos miembros (a la derecha) de las ecuaciones.
4. Resolver el sistema utilizando el método de Gauss.

**Ejercicio de aplicación**

**2** Un establecimiento de comidas rápidas elabora tres tipos de hamburguesas,  $H_1$ ,  $H_2$  y  $H_3$ , con tres ingredientes, X, Y, Z, en las cantidades que refleja la siguiente tabla:

	<b>X</b>	<b>Y</b>	<b>Z</b>
<b>H<sub>1</sub></b>	15	5	2
<b>H<sub>2</sub></b>	20	10	0
<b>H<sub>3</sub></b>	20	8	5

Si el coste de cada hamburguesa es 200, 260 y 315 pesetas, respectivamente, halla el precio de una unidad de cada ingrediente.

**Solución:**

Designamos por  $x, y, z$  el precio de cada unidad de ingredientes X, Y, Z. Del enunciado, resulta que el coste de cada hamburguesa es:

$$H_1: 15x + 5y + 2z = 200$$

$$H_2: 20x + 10y = 260$$

$$H_3: 20x + 8y + 5z = 315$$

La matriz ampliada de este sistema es:  $\begin{pmatrix} 15 & 5 & 2 & 200 \\ 20 & 10 & 0 & 260 \\ 20 & 8 & 5 & 315 \end{pmatrix}$ . Para simplificar los cálculos

vamos a dividir la segunda fila entre 10 y la vamos a intercambiar con la primera, con lo

cual la matriz anterior se convierte en:  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 26 \\ 15 & 5 & 2 & 200 \\ 20 & 8 & 5 & 315 \end{pmatrix}$ . Hacemos ahora las

operaciones:  $[2 \times (2^\text{a fila})] - [15 \times (1^\text{a fila})]$  y  $[2 \times (3^\text{a fila})] - [20 \times (1^\text{a fila})]$  obteniendo la

siguiente matriz:  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 26 \\ 0 & -5 & 4 & 10 \\ 0 & -4 & 10 & 110 \end{pmatrix}$ . Hacemos ahora la operación  $[(-5) \times (3^{\text{a}} \text{ fila})] -$

$[(-4) \times (2^{\text{a}} \text{ fila})]$  y tenemos por fin:  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 26 \\ 0 & -5 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & -34 & -510 \end{pmatrix}$ , cuyo sistema asociado es:

$$\begin{cases} 2x + y = 26 \\ -5y + 4z = 10 \\ -34z = -510 \end{cases}$$

De la tercera ecuación se obtiene  $z = 15$ . Sustituyendo en la segunda

ecuación tenemos  $-5y + 60 = 10$ , de donde  $y = 10$ . Finalmente, sustituyendo en la primera queda  $2x + 10 = 26$ , con lo cual  $x = 8$ .

Así pues los precios de cada unidad de ingredientes son 8, 10 y 15 pesetas respectivamente.

**Resuelve tú**

1. Los 24 alumnos de un curso tienen 15, 16 y 17 años de edad. Si la media aritmética de sus edades es 16,25 años, y el número de estudiantes de 16 años es igual al número de estudiantes de 15 años, más el número de estudiantes de 17 años, ¿cuántos alumnos hay de cada edad?
2. Juan acertó cuatro números en la Bonoloto, uno de los cuales era el 19. Propuso a su hermana que si averiguaba los tres números restantes que había acertado, le regalaba el premio. Para ello le dijo: “La suma del primero y el segundo es 3 unidades menor que el tercero; el doble del primero más el tercero es igual al triple del segundo más 8, y la suma de los tres números es 73.” ¿Cuáles son los tres números?
3. Un padre y sus dos hijos tienen en total 52 años; el padre tiene el triple de la suma de las edades de sus hijos y el hijo mayor tiene tres años más que el menor. Halla sus edades.
4. Un vinatero posee tres tipos de vino con precios por litro de 30, 40 y 70 céntimos de euro respectivamente. ¿Cómo debería mezclarlo para obtener 1 litro de vino cuyo precio fuese de 50 céntimos de euro por litro, teniendo en cuenta que debe emplear doble cantidad del vino de 40 céntimos por litro que del vino que cuesta sólo 30 céntimos por litro?
5. En una confitería envasan los bombones en cajas de 250 gramos, 500 gramos y 1 kg. Cierta día se envasaron 60 cajas en total, habiendo 5 cajas más de tamaño pequeño que de tamaño mediano. Sabiendo que el precio del kilogramo de bombones es de 40 euros y que el importe total de los bombones envasados asciende a 1250 euros, ¿cuántas cajas de cada tipo se han envasado?
6. Un ama de casa adquirió en el mercado ciertas cantidades de patatas, manzanas y naranjas a un precio de 1, 1,2 y 1,5 euros/kg, respectivamente. El importe total de la compra fue de 11,6 euros. El peso total de la misma es de 9 kg y, además, compró 1 kg más de naranjas que de manzanas. Determinar la cantidad comprada de cada producto.
7. Un tren transporta 700 viajeros y la recaudación del importe de sus billetes asciende a 9990 euros. Calcula cuántos viajeros han pagado el importe total del billete, que vale 27 euros, cuántos han pagado el 30% del billete y cuántos el 50%, sabiendo que el número de viajeros que han pagado el 30% es el doble del número de viajeros que paga el billete entero.