

## TEMA 1: Matrices. Determinantes

### 1. Definición de matriz

Una matriz es un conjunto de números o expresiones ordenadas en filas y columnas.

Cada uno de estos números o expresiones se llama **elemento** o **término** de la matriz, y su posición queda determinada por el número de su fila y el de su columna. Se escribe del siguiente modo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}}$$

El primer subíndice,  $i$ , de cada elemento  $a_{ij}$  indica la fila y el segundo,  $j$ , la columna.

El número de filas,  $m$ , y columnas,  $n$ , de una matriz define su **orden** o **dimensión**. Se representa por  $m \times n$ .

### Ejemplos de uso de las matrices:

- Los 627 alumnos que estudian en un Instituto de Enseñanza Secundaria se clasifican, según el nivel cursado y sexo, de acuerdo con la matriz  $4 \times 2$ :

|                 | H   | M   |
|-----------------|-----|-----|
| 3° ESO          | 107 | 110 |
| 4° ESO          | 84  | 95  |
| 1° Bachillerato | 69  | 68  |
| 2° Bachillerato | 46  | 48  |

Si el Instituto anterior es un centro comarcal en el que se reúnen estudiantes procedentes de tres pueblos  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$ , atendiendo a su procedencia y sexo, nos resulta la matriz  $2 \times 3$ :

|   | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ |
|---|-------|-------|-------|
| H | 90    | 182   | 34    |
| M | 91    | 189   | 41    |

Y si consideramos la actividad profesional de los padres de esos alumnos, tenemos la matriz  $3 \times 3$ :

|               | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ |
|---------------|-------|-------|-------|
| Funcionario   | 22    | 105   | 11    |
| Agricultor    | 114   | 115   | 12    |
| Manufacturero | 45    | 151   | 52    |

- Si queremos representar las conexiones señaladas en la figura 1 (que se denomina grafo), entre cuatro pueblos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ , que establece una línea de autobuses, podemos convenir en denotar por 1 si hay posibilidad de ir de un pueblo  $i$  (en fila) a otro  $j$  (en columna) en esa línea y por 0 si no es posible. Así, resulta la matriz de relación siguiente:

$$\begin{matrix}
 & A & B & C & D \\
 A & \left( \begin{array}{cccc}
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 0
 \end{array} \right)
 \end{matrix}$$

observa que del pueblo *B* se puede ir al *C*, y no al revés, como se ha querido indicar con el sentido de la flecha *BC* en la figura 1.

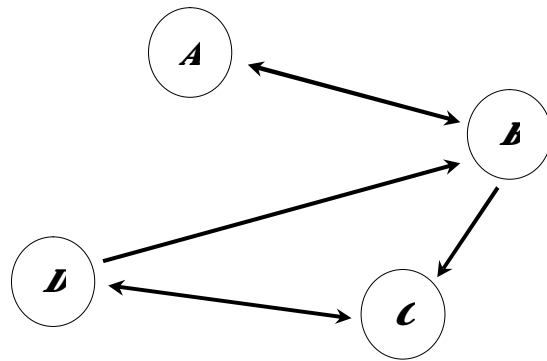


Figura 1

**3. Matriz input-output de una economía**

En el análisis económico actual juega un papel predominante la llamada matriz **input-output** o de **entradas-salidas**. Esta matriz fue planteada por primera vez por el economista norteamericano y premio Nobel W. Leontieff y, en ella, se resumen las transacciones que se establecen entre los diferentes sectores productivos que pueden considerarse en la economía de un país, aunque el análisis también podría restringirse a una región, comunidad autónoma, etc., incluso, a un conjunto de empresas.

Considerado solamente los tres sectores básicos de un país: Agricultura (I), Industria (II) y Servicios (III), la matriz input-output tendría la forma:

| Sectores | I        | II       | III      | D     | Output |
|----------|----------|----------|----------|-------|--------|
| I        | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $D_1$ | $S_1$  |
| II       | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | $D_2$ | $S_2$  |
| III      | $x_{31}$ | $x_{32}$ | $x_{33}$ | $D_3$ | $S_3$  |

En ella podemos distinguir la submatriz  $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ , que se llama matriz

de **transacciones intersectoriales**, en la que cada término  $x_{ij}$  indica la cantidad de producción del sector *i*ésimo vendida (salida, para *i* al sector *j*o, alternativamente, la cantidad comprada por el sector *j*ésimo (entrada, para *j* al *i*, en un período de tiempo.

Así, por ejemplo:  $x_{11}$  indica lo que la agricultura consume de su propia producción (siembra, alimentación del ganado...);  $x_{12}$ , lo que la agricultura vende a la industria (para hacer conservas, piensos...);  $x_{13}$ , lo que la agricultura vende al sector servicios (ocio, decoración...). La segunda y tercera filas reflejan análogas salidas para la industria y servicios, respectivamente.

También aparece la submatriz  $D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$ , que es la matriz de **demanda final**, que

refleja la demanda de consumo interno y externo (exportaciones) que debe satisfacer cada uno de los sectores en cuestión. Por ejemplo,  $D_1$  puede ser la demanda de víveres que realiza la población.  $D_2$  los electrodomésticos, entre otros artículos, que se utilizan, etc.

Entonces, la suma de estas cantidades por filas:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + D_1 = S_1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + D_2 = S_2$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + D_3 = S_3$$

origina una nueva matriz  $S = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$  llamada matriz del **output** o **salidas totales**, que

representa, ni más ni menos, el volumen de producción total que debe realizar cada uno de los sectores. Un ejemplo de matriz input-output, expresada con datos numéricos (en millones de euros), podría ser:

| Sectores | I  | II | III | D  | Output |
|----------|----|----|-----|----|--------|
| I        | 20 | 18 | 12  | 50 | 100    |
| II       | 20 | 40 | 25  | 65 | 150    |
| III      | 40 | 60 | 30  | 70 | 200    |

En la fila segunda se indica que el sector industrial debe producir un total de 150 millones. De ellos, 20 se emplean en la agricultura, 40 en la industria, 25 en servicios y 65 se dedicarán al consumo interno o a la exportación.

La matriz input-output permite hacer previsiones de producción ante las posibles demandas  $D_i$ , pudiéndose evitar desajustes entre la salida de un sector y la entrada que necesita otro, con una ordenada planificación.

### Ø Tipos de matrices

#### ü Matrices iguales

Dos matrices  $A = (a_{ij})$  y  $B = (b_{ij})$  de idéntico orden se dice que son iguales si  $(a_{ij}) = (b_{ij}), \forall i, j$ . Es decir, si los términos de igual posición tienen el mismo valor.

#### ü Matriz traspuesta

Se llama **matriz traspuesta** de  $A$ , a la matriz que resulta de intercambiar ordenadamente las filas por las columnas. Así, la primera fila se transformará en primera columna de la traspuesta, la segunda fila en segunda columna, etc.

La matriz traspuesta de  $A$  se denota por  $A'$ .

Siempre se cumple la siguiente propiedad:  $(A')' = A$ .

### Ejemplo:

4. La traspuesta de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$  es  $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

#### ü Matriz nula

Una matriz, cualquiera que sea su orden, es **nula** si todos los elementos que figuran en ella son 0. Se suele designar con una "O" mayúscula:  $O$ .

### Ü **Matriz fila**

Aquella que está formada por una sola fila:  $A = (a_{1,j})_{j=1,2,\dots,n}$

### Ü **Matriz columna**

La que solamente tiene una columna:  $A = (a_{i,1})_{i=1,2,\dots,m}$

### Ü **Matriz cuadrada**

Una matriz cuyo número de filas sea igual a su número de columnas, se dice que es **cuadrada**.

Una matriz cuadrada tendrá pues orden  $n \times n$  y se dirá en general que es de **orden  $n$** . Los elementos  $a_{ii}$  forman su **diagonal principal**.

Dentro de las matrices cuadradas destacamos los tipos más frecuentes:

- **Matriz triangular**

Una matriz cuadrada cuyos elementos situados por encima o por debajo de los que ocupan la diagonal principal son nulos se llama **matriz triangular**.

### Ejemplo:

5. Las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$  son triangulares (la primera se denomina triangular superior y la segunda triangular inferior)

- **Matriz diagonal**

Es una matriz cuadrada en la que los elementos situados fuera de la diagonal principal son nulos. O sea,  $a_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ .

- **Matriz identidad o matriz unidad**

Es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal toman el valor 1. Se suele denotar por  $I$ .

- **Matriz simétrica**

Una matriz cuadrada  $A$  se dice **simétrica** cuando  $a_{ij} = a_{ji}$ . Esto es, los elementos "simétricos" respecto de la diagonal principal son iguales. Observa que toda matriz **simétrica** coincide con su traspuesta (si  $A$  es simétrica  $\Rightarrow A = A^t$ ).



### Ejercicio de aplicación

1 Halla el valor o valores que deben tomar las incógnitas  $x, y, z$  para que la matriz  $A = \begin{pmatrix} x+y & y-z+1 \\ y-2 & x+z-1 \end{pmatrix}$  sea una matriz:

a) Nula.

b) Simétrica.

c) Unidad.

**Solución:**

a) En este caso, debe cumplirse que  $\begin{pmatrix} x+y & y-z+1 \\ y-2 & x+z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , lo que da lugar al

$$\text{sistema } \begin{cases} x+y=0 \\ y-z+1=0 \\ y-2=0 \\ x+z-1=0 \end{cases}, \text{ cuyas soluciones son: } x = -2, y = 2, z = 3, \text{ como puedes}$$

comprobar.

b) La simetría exige en este caso que  $a_{12} = a_{21}$ , esto es  $y-2 = y-z+1$ , cuya solución es  $z = 3$ . Por tanto pueden obtenerse infinitas matrices simétricas; basta con dar a  $x$  e  $y$  valores arbitrarios y a  $z$  el valor 3. Por ejemplo, si  $x = 3$ ,  $y = -1$  y  $z = 3$ , resulta la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$  que, como puedes ver, es simétrica.

c) Para esta situación  $\begin{pmatrix} x+y & y-z+1 \\ y-2 & x+z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , que da lugar al sistema

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y-z+1=0 \\ y-2=0 \\ x+z-1=1 \end{cases}, \text{ cuya solución es } x = -1, y = 2, z = 3.$$

## 2. Operaciones con matrices

El uso de las matrices como representación de conjuntos de datos bidimensionales exige poder operarlas a fin de obtener nuevas matrices; estas nuevas matrices permitirán analizar la posible evolución del fenómeno estudiado.

Las matrices pueden sumarse, restarse y multiplicarse, pero siempre con algunas limitaciones. Veamos cómo se definen estas operaciones.

### Ø Suma de matrices

Para poder sumar dos matrices han de tener el mismo orden. Si  $A = (a_{ij})$  y  $B = (b_{ij})$ , la matriz suma es  $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ .

### Ejemplo.

6. Las exportaciones, en millones de dólares, de tres países A, B, y C a otros tres países X, Y, y Z, en los años 1995 y 1996, vienen expresadas, respectivamente, por las matrices:

$$1995: \begin{matrix} & \begin{matrix} X & Y & Z \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 11 & 6,7 & 0,5 \\ 14,5 & 10 & 1,2 \\ 20,9 & 3,2 & 2,3 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad 1996: \begin{matrix} & \begin{matrix} X & Y & Z \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 13,3 & 7 & 1 \\ 15,7 & 11,1 & 3,2 \\ 21 & 0,2 & 4,3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

El total de exportaciones de los primeros países a los segundos, en esos años se obtendrá mediante la siguiente suma:

$$\begin{matrix} & & & & X & Y & Z \\ \begin{pmatrix} 11 & 6,7 & 0,5 \\ 14,5 & 10 & 1,2 \\ 20,9 & 3,2 & 2,3 \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} 13,3 & 7 & 1 \\ 15,7 & 11,1 & 3,2 \\ 21 & 0,2 & 4,3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 24,3 & 13,7 & 1,5 \\ 30,2 & 21,1 & 4,4 \\ 41,9 & 3,4 & 6,6 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}$$

El país A ha exportado a X por valor de  $11 + 13,3 = 24,3$  millones de dólares; el B a Y por un total de  $10 + 11,1 = 21,1$  y análogamente para el resto de entradas.

### Ü *Propiedades de la suma*

La suma de matrices verifica las propiedades habituales de la suma de números. Por tanto, si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son matrices que se pueden sumar, se cumple:

- **Conmutativa:**  $A + B = B + A$
- **Asociativa:**  $A + (B + C) = (A + B) + C$
- **Existencia de elemento neutro:** Existe una matriz  $O$  cumpliendo la siguiente propiedad:  $A + O = O + A = A$ , siendo  $O$  la matriz nula de igual orden que  $A$ .
- **Existencia de elemento opuesto o simétrico:** Dada una matriz  $A = (a_{ij})$ , existe otra matriz a la cual llamaremos  $-A = (-a_{ij})$  (matriz opuesta o simétrica de  $A$ ) cumpliendo la siguiente propiedad:  $A + (-A) = (-A) + A = O$ .

Esta última propiedad nos permite restar matrices, pues  $A - B = A + (-B)$ .



### *Ejercicio de aplicación*

**2 a)** Halla  $x$ ,  $y$ ,  $z$  en la siguiente suma:

$$\begin{pmatrix} x-y & -1 & 2 \\ 1 & y & -x \\ 0 & z & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 & z \\ -z & 2 & 3 \\ -2 & 3 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

**b)** Calcula, por otra parte, el incremento de las exportaciones del año 1995 al año 1996 con los datos del ejemplo 6.

**Solución:**

**a)** Como  $\begin{pmatrix} x-y & -1 & 2 \\ 1 & y & -x \\ 0 & z & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 & z \\ -z & 2 & 3 \\ -2 & 3 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -1 & 2+z \\ 1-z & y+2 & -x+3 \\ -2 & z+3 & 2+x \end{pmatrix}$  debe cumplirse

que:  $\begin{pmatrix} x & -1 & 2+z \\ 1-z & y+2 & -x+3 \\ -2 & z+3 & 2+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ , lo que da como soluciones:  $x = -1$ ,

$y = 2$ ,  $z = 1$ .

**b)** El incremento vendrá dado por la diferencia entre las matrices de exportación del año 1996 y del año 1995:

$$\begin{pmatrix} 13,3 & 7 & 1 \\ 15,7 & 11,1 & 3,2 \\ 21 & 0,2 & 4,3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 & 6,7 & 0,5 \\ 14,5 & 10 & 1,2 \\ 20,9 & 3,2 & 2,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13,3-11 & 7-6,7 & 1-0,5 \\ 15,7-14,5 & 11,1-10 & 3,2-1,2 \\ 21-20,9 & 0,2-3,2 & 4,3-2,3 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 2,3 & 0,3 & 0,5 \\ 1,2 & 1,1 & 2 \\ 0,1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

### Ø **Producto de una matriz por un número (o producto por un escalar)**

Sean  $A = (a_{ij})$  una matriz y  $k$  un número real. Para hacer el producto de  $k$  por  $A$ , se han de multiplicar todos los elementos de  $A$  por  $k$ , es decir,  $kA = (ka_{ij})$ .

$$\text{Así, por ejemplo, } k \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 7 \\ 0 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4k & -2k & 5k \\ 3k & -k & 7k \\ 0 & -5k & 4k \end{pmatrix}$$

### Ø **Producto de matrices**

Las anteriores operaciones se han definido extendiendo, de forma natural, esas mismas operaciones conocidas de los números reales. Sin embargo, el producto de matrices no es tan inmediato, por lo que comenzaremos su construcción empezando por las matrices más simples.

#### Ü **Producto de una matriz fila por una matriz columna**

Comencemos con un ejemplo fácil:

Si  $F = (109 \ 91 \ 100 \ 96)$  indica los precios, en céntimos, del litro de leche en cuatro

establecimientos distintos y la matriz columna  $C = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$  nos da los litros comprados en

cada uno de ellos, entonces, para calcular el total de lo gastado en la compra de leche, hacemos el siguiente producto:

$$FC = (109 \ 91 \ 100 \ 96) \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = 106 \cdot 6 + 91 \cdot 12 + 100 \cdot 4 + 96 \cdot 9 = 3010 \text{ céntimos}$$

Observa que el resultado es un número.

En general, el producto de una matriz fila por una matriz columna (con el mismo número de entradas) se define como el número que se obtiene al sumar los productos de las entradas correspondientes. Esto es,

$$FC = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} = \sum_{j=1}^n a_{1j}b_{j1}$$

Ü **Producto de una matriz fila por una matriz**

Se multiplica la matriz fila F por cada una de las columnas de la matriz B. Por ejemplo,

para  $F = (a_{11} \ a_{12} \ a_{13})$  y  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$ , se tiene que

$$FB = (a_{11} \ a_{12} \ a_{13}) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \quad a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})$$

Fíjate que para que este producto pueda realizarse es necesario que el **número de columnas de la matriz fila F coincida con el número de filas de la matriz B**.

**Ejemplo**

7. Supongamos que en las últimas elecciones municipales tres partidos concurren a ellas, en cierta ciudad, abogando, en sus respectivos programas electorales, por la subvención de una industria local (*I*), un centro cultural (*CC*) o una *ONG*. El porcentaje de votantes, de cada partido que apoyan las distintas opciones se muestra en la matriz A siguiente:

$$\begin{matrix} & I & CC & ONG \\ \text{Partido 1} & 12 & 36 & 52 \\ \text{Partido 2} & 30 & 35 & 35 \\ \text{Partido 3} & 46 & 26 & 28 \end{matrix} = A$$

Supongamos también que el número de votos que obtuvo cada partido se da en la matriz fila F:

$$F = \begin{matrix} \text{Part.1} & \text{Part.2} & \text{Part.3} \\ 46000 & 21000 & 13000 \end{matrix}$$

Estos datos nos permiten calcular el número total de votantes, independientemente del partido al que hayan votado, que apoyan cada una de las opciones citadas.

Así, los votantes que defienden la subvención a la industria local serían:

$$46000 \frac{12}{100} + 21000 \frac{30}{100} + 13000 \frac{46}{100} = 17800, \text{ que es el resultado de multiplicar } F$$

por la primera columna de *A*. (El 12 % equivale a multiplicar por  $\frac{12}{100}$ , y lo mismo en los demás casos).

Del mismo modo podrían hallarse los que optan por el centro cultural o la *ONG*.

Por tanto, si hacemos el siguiente producto, obtendremos el resultado global.

$$F\left(\frac{1}{100}A\right) = \frac{1}{100}(FA) = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 46000 & 21000 & 13000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 36 & 52 \\ 30 & 35 & 35 \\ 46 & 26 & 28 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{matrix} I & CC & ONG \\ = (17800 & 27290 & 34910) \end{matrix}$$

### ü **Producto de dos matrices**

Para multiplicar dos matrices, se ha de hacer el producto de cada fila de la primera matriz por todas las columnas de la segunda, según se mostró anteriormente.

Así pues es **condición indispensable** para multiplicar dos matrices que el número de columnas de la primera sea igual al número de filas de la segunda; en otro caso el producto es imposible.

Supongamos la primera matriz  $A$  de orden  $m \times p$ . Entonces la segunda matriz  $B$  ha de tener orden  $p \times n$ . La matriz producto, llamémosla  $C$ , tendrá orden  $m \times n$ , es decir, tantas filas como la primera matriz  $A$  y tantas columnas como la segunda matriz  $B$ .

$$A_{m \times p} B_{p \times n} = C_{m \times n}$$

### **Ejemplo.**

8. Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$  calcularemos los dos productos

posibles  $AB$  y  $BA$ :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 \\ 0 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 & 0 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) & 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 5 \\ 4 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 4 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) & 4 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -10 \\ 13 & -1 & 13 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 & 3 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 5 \cdot 4 & 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 21 & 6 \end{pmatrix}$$

### ü **Propiedades del producto**

A la hora de multiplicar matrices hay que tener cierto cuidado, pues no siempre se cumplen las propiedades acostumbradas del producto de números. Así, en el ejemplo anterior habrás visto cómo  $AB \neq BA$ .

Por este motivo vamos a indicar las propiedades que se cumplen y las que no se cumplen.

- **Propiedades que se cumplen:**

○ **Asociativa.** Si pueden hacerse los productos  $AB$  y  $BC$ , se cumplen la igualdad:  $(AB)C = A(BC)$ .

○ **Distributiva.** Si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son matrices de orden apropiado entonces se cumple que  $A(B + C) = AB + AC$ .

○ **Elemento neutro para la multiplicación: matriz unidad.** Designando por  $I_n$  e  $I_m$  las matrices unidad de orden  $n$  y  $m$  se tiene que  $A_{m \times n} I_n = A_{m \times n}$ ;  $I_m A_{m \times n} = A_{m \times n}$ . O sea,  $I$  se comporta como el 1 en la multiplicación de números, aunque  $I$  no es única, pues ha de ajustarse su orden al de la matriz que multiplica.

- **Propiedades que no se cumplen (en general):**

○ **Conmutativa.** Ya vimos en el ejemplo 8 que  $AB \neq BA$ . Aún más, es frecuente que dos matrices, siendo multiplicables en cierto orden, no lo sean en el recíproco. Esto provoca que se haga necesario indicar en qué sentido se realiza un producto. Así cuando escribimos  $AB$  y leemos "a por b" es **justamente en este orden: el primer factor es A y el segundo es B**.

○ **Divisores de cero.** Un producto de matrices puede dar la matriz nula sin ser nula ninguna de las matrices factores. Es decir,  $AB = O$  no implica necesariamente que  $A = O$ , o bien que  $B = O$ . (Ver ejemplo 9).

Por ello se dice que las matrices tienen **divisores de cero**.

○ **Cancelativa.** No siempre de una igualdad entre matrices, como  $AB = CB$  con  $B \neq O$ , puede deducirse que  $A = C$ . Ello es debido a la existencia de los divisores de cero, pues si  $AB = CB \Leftrightarrow AB - CB = O \Leftrightarrow (A - C)B = O$  y esto no quiere decir que  $A - C = O$ , o su equivalente, que  $A = C$ . (Ver ejemplo 10)

---

### Ejemplos:

9. Observa que ni A ni B son nulas, siendo  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . En cambio

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ (Compruébalo haciendo la multiplicación).}$$

10. Si  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ , se cumple que  $AB = CB$ . En

efecto, tenemos que  $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \\ -15 & 5 \end{pmatrix}$  (compruébalo) y, por

otro lado  $CB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \\ -15 & 5 \end{pmatrix}$  (comprueba este resultado también).

Sin embargo,  $A \neq C$ .

### Ø *Potencia de una matriz cuadrada*

De modo análogo a como se definen las potencias de un número, si A es una matriz cuadrada y p es un número natural, se define  $A^p = \underbrace{AA \dots A}_{p \text{ veces}}$

### Ejemplos:

11. Si  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  entonces  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ .

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 26 & 27 \end{pmatrix}.$$

12. La matriz del ejemplo 2, que llamaremos  $R$ , nos muestra las comunicaciones entre los cuatro pueblos A, B, C y D (ver figura 1). Si calculamos  $R^2$  tenemos:

$$R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz nos indica el número de **itinerarios de dos etapas** que hay para ir de un pueblo a otro. Así, por ejemplo, que el elemento  $a_{33}$  del producto valga 1, indica que de A hacia C sólo hay una forma de ir en dos etapas. Cuando aparece un cero significa que no es posible tal itinerario entre los pueblos del cruce; así, de C hacia A no puede irse en dos etapas.

La matriz  $R^3$  indicaría los itinerarios de tres etapas entre los pueblos considerados.

En algún caso puede que interese dar la expresión de una potencia genérica  $A^n$  en función del número natural n. Por métodos elementales, en general, no será posible hacerlo, pero puede suceder que la secuencia  $A, A^2, A^3, A^4, \dots$  sugiera una conjetura

aceptable para  $A^n$ . Tal conjetura deberá probarse recurriendo al **principio de inducción matemática**, el cual exige el cumplimiento de dos premisas:

- (1) Comprobar su certeza para  $n = 1$ .
- (2) Suponiendo que se cumple para  $n$ , demostrar que también lo hace para  $n + 1$  (el siguiente número a  $n$ ).

En consecuencia, como se cumple para  $n = 1$  y para el siguiente de cualquier  $n$ , se cumplirá para  $n = 2, n = 3, n = 4, \dots$  y siempre.



### Ejercicio de aplicación

**3** Si  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , calcula  $A^n$ .

#### Solución:

Hallamos las primeras potencias para descubrir, si fuese posible, una ley de recurrencia simple:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observamos que:

- 1)  $A, A^2$  y  $A^3$  son matrices triangulares con  $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$  (la diagonal principal está formada por unos) en los tres casos.
- 2) Los elementos  $a_{21}$  y  $a_{31}$  valen para  $A$ , 1; para  $A^2$ , 2 y para  $A^3$ , 3.
- 3)  $a_{32} = 0$  en los tres casos.

Esto nos permite conjeturar que  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , que es cierto para  $n = 1$ .

Veamos también si se cumple la igualdad para  $n + 1$ . Esto es, para  $A^{n+1}$ , los elementos variables  $a_{21}$  y  $a_{31}$  deben valer  $n + 1$ :

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n+1 & 1 & 0 \\ n+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como es cierto, nuestra hipótesis sobre  $A^n$  es correcta.

### 3. Determinante de una matriz cuadrada

A cada matriz cuadrada de orden  $n$  puede asociársele un número real, llamado **determinante** de la matriz, que se obtiene a partir de los términos de la misma. Si la matriz es  $A$ , tal número se simboliza por  $|A|$ .

Veamos el cálculo de los determinantes de las matrices de orden dos y tres.

#### Ø Determinante de orden dos

Si  $A$  es una matriz de orden 2,  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , su determinante se calcula utilizando la siguiente fórmula:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

es decir, mediante la diferencia entre los productos de la diagonal principal y la diagonal secundaria.

#### Ejemplo:

**13.** Los determinantes de las matrices  $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$  valen:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 6, \quad \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 0 \cdot 7 - (-3) \cdot 4 = 12, \quad \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \cdot 0 - 0 \cdot (-2) = 0$$

#### Ø Determinante de orden tres

Si  $A$  es una matriz de orden 3,  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ , su determinante se calcula

utilizando la siguiente fórmula, llamada **regla de Sarrus**, consistente en suma productos de tres factores:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11})$$

Para recordar la regla anterior podemos recurrir a la gráfica siguiente:

- Términos positivos (diagonal principal y paralelas en triángulo):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- Términos negativos (diagonal secundaria y paralelas en triángulo):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

**Ejemplo:**

14. El determinante de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$  es  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 7 & 8 \end{vmatrix} = (1 \cdot 5 \cdot 8 + 3 \cdot 4 \cdot 9 + 6 \cdot 7 \cdot 2) - (2 \cdot 5 \cdot 9 + 3 \cdot 6 \cdot 8 + 4 \cdot 7 \cdot 1) = (40 + 108 + 84) - (90 + 144 + 28) = 232 - 262 = -30$

Ø **Menor complementario y adjunto**

El **menor complementario** del elemento  $a_{ij}$  de una matriz cuadrada  $A$ , de orden  $n$ , es el determinante de la matriz cuadrada de orden  $n - 1$  que se obtiene al suprimir la fila  $i$  y la columna  $j$ . Se representa por  $\Delta_{ij}$

Se llama **adjunto**  $A_{ij}$  de un elemento  $a_{ij}$  de una matriz cuadrada  $A$ , al producto de  $-1$  elevado a  $i+j$  por el valor del menor complementario de ese elemento, esto es:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$$

**Ejemplo:**

15. Los adjuntos  $A_{11}$  y  $A_{32}$  de los elementos  $a_{11}$  y  $a_{32}$  de la matriz del ejemplo anterior son:  $A_{11} = (-1)^{1+1} \Delta_{11}$  y  $A_{32} = (-1)^{3+2} \Delta_{32}$ . Para poderlos calcular hemos de hallar primero el valor de los menores complementarios  $\Delta_{11}$  y  $\Delta_{32}$ :

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 8 - 7 \cdot 4 = 12 ; \Delta_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 6 \cdot 2 = -8$$

Así pues:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \Delta_{11} = (-1)^2 \cdot 12 = 12 ; A_{32} = (-1)^{3+2} \Delta_{32} = (-1)^5 (-8) = 8$$

Ø **Matriz adjunta de una matriz cuadrada**

Dada una matriz cuadrada  $A$ , si cada elemento se sustituye por su adjunto, obtenemos una nueva matriz que recibe el nombre de **matriz adjunta**. Se representa por  $A'$ :

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ entonces } A' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

**Ejemplo:**

**16.** La matriz adjunta del ejemplo 14 se construye calculando todos los adjuntos. En el ejemplo anterior vimos dos de ellos:  $A_{11} = 12$  y  $A_{32} = 8$ . Calculemos el resto.

$$A_{22} = (-1)^{1+2} \cdot \Delta_{12} = - \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = -(48 - 36) = -12$$

$$A_{33} = (-1)^{1+3} \cdot \Delta_{12} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} = 42 - 45 = -3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \Delta_{21} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -(24 - 14) = -10$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \Delta_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 18 = -10$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \Delta_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} = -(7 - 27) = 20$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \Delta_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \Delta_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 18 = -13$$

Así pues, la matriz adjunta es:  $A' = \begin{pmatrix} 12 & -12 & -3 \\ -10 & -10 & 20 \\ 2 & 8 & -13 \end{pmatrix}$

**Ø Matriz inversa de una matriz cuadrada**

Una matriz cuadrada  $A$  tiene inversa (o es invertible) si existe otra matriz cuadrada  $A^{-1}$  (llamada matriz inversa de  $A$ ) del mismo orden cumpliendo la siguiente igualdad:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero, es decir:

$$A \text{ es invertible} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

En este caso la matriz inversa de  $A$  se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A')$$

O sea, para calcular la matriz inversa hemos de calcular la matriz adjunta, hacer su traspuesta y multiplicar por el número  $\frac{1}{|A|}$ .

**Ejemplo:**

17. Vimos en el ejemplo 14 que la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$  tenía por determinante

$|A| = -30$ . Como  $|A| \neq 0$  entonces la matriz  $A$  es invertible. Calculemos su inversa. La matriz adjunta se calculó en el ejemplo anterior y nos daba como resultado:

$A' = \begin{pmatrix} 12 & -12 & -3 \\ -10 & -10 & 20 \\ 2 & 8 & -13 \end{pmatrix}$ . La traspuesta de la matriz adjunta será pues:

$(A')' = \begin{pmatrix} 12 & -10 & 2 \\ -12 & -10 & 8 \\ -3 & 20 & -13 \end{pmatrix}$ . Por tanto la matriz inversa será:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A')' = \frac{1}{-30} \begin{pmatrix} 12 & -10 & 2 \\ -12 & -10 & 8 \\ -3 & 20 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{30} & \frac{10}{30} & -\frac{2}{30} \\ \frac{12}{30} & \frac{10}{30} & -\frac{8}{30} \\ \frac{3}{30} & -\frac{20}{30} & \frac{13}{30} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{15} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{15} \\ \frac{1}{10} & -\frac{2}{3} & \frac{13}{30} \end{pmatrix} \quad (\text{¡compruébalo multiplicando } A \text{ por } A^{-1} \text{ y obteniendo como resultado la matriz identidad } I)$$



## Resuelve tú

1. Cierta fábrica de colonias posee tres marcas  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ , distribuyendo su producción en cuatro tiendas. Los litros almacenados en la primera tienda vienen dados por la siguiente matriz:

$$\begin{array}{l} \text{Agua de colonia} \\ \text{Perfume} \\ \text{Concentrado} \end{array} \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ 22 & 46 & 80 \\ 2 & 1,5 & 3 \\ 0,6 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} = A$$

- La segunda tienda almacena el doble que la primera, la tercera la mitad y la cuarta el triple. ¿Qué volumen de producción se tiene almacenado en total?
2. Una empresa fabrica tres tipos de artículos: A, B y C. Los precios de coste de cada unidad son 600, 920 y 1430 euros, respectivamente. Los correspondientes precios de venta de una unidad de cada artículo son 1800, 2800 y 4000 euros. El número de unidades vendidas anualmente es de 2240, 1625 y 842 respectivamente. Sabiendo que las matrices de costes e ingresos,  $C$  e  $I$ , son diagonales y que la matriz de ventas,  $V$ , es una matriz fila:
- Determina las matrices  $C$ ,  $I$  y  $V$ .
  - Obtén, a partir de las matrices anteriores, la matriz de ingresos anuales correspondiente a los tres artículos, la matriz de gastos anuales y la matriz de beneficios anuales.
3. Una fábrica produce dos modelos de lavadoras: A y B, en tres terminaciones: N, L y S. Produce del modelo A: 400 unidades en la terminación N, 200 unidades en la terminación L y 50 unidades en la terminación S. Produce del modelo B: 300 unidades en la terminación N, 100 unidades en la terminación L y 30 unidades en la terminación S. La terminación N lleva 25 horas de taller y 1 hora de administración. La terminación L lleva 30 horas de taller y 1,2 horas de administración. La terminación S lleva 33 horas de taller y 1,3 horas de administración.
- Representa la información en dos matrices.
  - Halla una matriz que exprese las horas de taller y administración empleadas para cada uno de los modelos.
4. Una fábrica produce dos modelos de coches A y B, en tres acabados: GT, GD y Ti. Produce, al mes, del modelo A: 200, 100 y 50 unidades en los acabados GT, GD y Ti, respectivamente. Produce del modelo B: 150, 50 y 10 unidades de análogos acabados. El acabado GT lleva 25 horas de taller de chapa y 10 horas de montaje. El acabado GD lleva 28 horas de taller de chapa y 12 de montaje y el acabado Ti lleva 28 y 15 horas de chapa y montaje, respectivamente.
- Elabora dos matrices que contengan la información dada.
  - Calcula las horas de taller de chapa y de montaje que son necesarias para cada uno de los modelos.

5. Halla la matriz inversa de  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$  y comprueba que lo es, multiplicándola por la dada.

6. Halla la matriz  $X$  tal que  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

7. Determina aquellos valores de  $y$  para los que la matriz  $Z = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  verifique la ecuación matricial:  $Z^2 - \frac{5}{2}Z + I = O$ ; siendo  $I$  la matriz identidad de orden dos y  $O$  la matriz nula de orden dos. Expresa  $Z^{-1}$  en función de  $Z$ .

8. Las relaciones de equilibrio de dos mercados  $X$  e  $Y$  vienen dadas en función de sus precios de equilibrio  $P_x$  y  $P_y$ , por las siguientes ecuaciones:  $\left. \begin{matrix} 2P_x - P_y = 3 \\ P_x + 2P_y = 4 \end{matrix} \right\}$ . Escribe esta información en notación matricial y determina el precio de equilibrio de cada mercado.

9. Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

a) Halla  $A^{-1}$  y  $B^{-1}$

b) Calcula la matriz inversa de  $AB$ .

c) Comprueba que la inversa de  $AB$  es la matriz  $B^{-1}A^{-1}$ :  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

10. Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ . Se define  $B = 2A - I$ , donde  $I$  es la matriz identidad de orden dos. Calcula  $B^n$  siendo  $n$  un número entero positivo.

11. Resuelve la ecuación matricial  $X \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = O$ , donde  $O$  es la matriz nula de orden dos.

12. Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ t & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ , halla los valores de  $t$  para los cuales  $A$ , no tiene inversa.

13. Resuelve las ecuaciones siguientes: a)  $\begin{vmatrix} 1 & x & -1 \\ 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix} = 3$ ; b)  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ m & m+1 & m \\ 2m & 2m+1 & 2m+1 \end{vmatrix} = 0$ ;

c)  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix} = 10$ ; d)  $\begin{vmatrix} 3 & -1 & x \\ 5 & 2x & 7 \\ -1 & 3 & x \end{vmatrix} = 5x + 6$

- 14.** ¿Para que valores de  $a$  la matriz  $\begin{pmatrix} 3a+1 & a & a \\ 6a+2 & 2a+1 & 2a \\ 3a+1 & a & a+1 \end{pmatrix}$  tiene inversa?. Halla la matriz inversa si  $a=1$ .

- 15.** Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & t \\ -t & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ , halla los valores de  $t$  para los cuales  $A$  no tiene inversa.

- 16.** Hallar las inversas de las siguientes matrices:

**a)**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ; **b)**  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; **c)**  $C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ ; **d)**  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ;

**e)**  $E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$ ; **f)**  $F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ; **g)**  $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- 17.** Resuelve la ecuación  $AX = B + 2C$  siendo  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}$  y

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

- 18.** Hallar una matriz  $X$  tal que  $B(2A + I) = AXA + B$ , siendo  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  y

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$