Pedro Castro Ortega
Departamento de Matemáticas

Ejemplos de cálculo de límites relacionados con el número e (indeterminación del tipo $1^{\pm\infty}$)

Ejemplo 1:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x^2+1}{x^2-1}-1\right)^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x^2+1-\left(x^2-1\right)}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-1}{2}}\right)^{x^2}=\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-1}{2}}\right)^{\frac{x^2-1}{2}}\right]^{\frac{2}{x^2-1}\cdot x^2}=\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-1}{2}}\right)^{\frac{x^2-1}{2}}\right]^{\frac{2x^2}{x^2-1}}=e^2$$

Pasos:

1. Obsérvese que siempre es verdad la siguiente igualdad $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{1}{\dfrac{g(x)}{f(x)}}$

2. Colocamos $\dfrac{x^2-1}{2}$ en el exponente, expresión que, cuando $x\to+\infty$, tiende a $+\infty$.

   Con lo que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-1}{2}}\right)^{\frac{x^2-1}{2}}=e$

3. Como hemos puesto en el exponente la expresión $\dfrac{x^2-1}{2}$, la “quitamos” multiplicando por $\dfrac{2}{x^2-1}$ (recuérdese que al hacer potencia de una potencia se multiplican los exponentes). Es como “no hacer nada” pues $\dfrac{x^2-1}{2}\cdot\dfrac{2}{x^2-1}=1$

Ejemplo 2:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-4}{3x-2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3x-4}{3x-2}-1\right)^{\frac{x+1}{3}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3x-4-3x+2}{3x-2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-2}{3x-2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x-2}{-2}}\right)^{\frac{x+1}{3}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3x-2}{-2}}\right)^{\frac{3x-2}{-2}}\right]^{\frac{-2}{3x-2}\cdot\frac{x+1}{3}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3x-2}{-2}}\right)^{\frac{3x-2}{-2}}\right]^{\frac{-2x-2}{9x-6}}=e^{-\frac{2}{9}}$$

Ejemplo 3:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{x^2-5} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{x-3}{x+2}-1\right)^{x^2-5} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{x-3-x-2}{x+2}\right)^{x^2-5} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{-5}{x+2}\right)^{x^2-5} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{-5}}\right)^{x^2-5} = \lim_{x\to-\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{-5}}\right)^{\frac{x+2}{-5}}\right]^{\frac{-5}{x+2}\left(x^2-5\right)} = \lim_{x\to-\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{-5}}\right)^{\frac{x+2}{-5}}\right]^{\frac{-5x^2+25}{x+2}} = e^{+\infty} = +\infty$$

Ejemplo 4:

$$\lim_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to1}\left(1+x-1\right)^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to1}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{x-1}}\right)^{\frac{1}{1-x}} = \left[\lim_{x\to1}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{x-1}}\right)^{\frac{1}{x-1}}\right]^{x-1\frac{1}{1-x}} =$$

$$= \left[\lim_{x\to1}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{x-1}}\right)^{\frac{1}{x-1}}\right]^{\frac{x-1}{-(x-1)}} == \left[\lim_{x\to1}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{x-1}}\right)^{\frac{1}{x-1}}\right]^{-1} = e^{-1}$$