

INTEGRAL INDEFINIDA. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

Método de integración por cambio de variable

Consiste en sustituir x por una función adecuada para que la expresión resultante sea más sencilla de integrar que la primera.

Si x es función de t : $x = g(t)$, entonces la diferencial de x es: $dx = g'(t) dt$, con lo cual:

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt$$

Aplicaremos este método cuando la segunda integral sea más fácil de calcular que la primera. La cuestión más difícil es saber la función $g(t)$ adecuada en cada caso.

Ejemplo 1

Calcular la siguiente integral: $\int \sqrt{1-x^2} dx$

Llamando $x = \operatorname{sen} t$, será $dx = \cos t dt$, y la integral anterior se puede escribir:

$$\int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} + C = \frac{t}{2} + \frac{2 \operatorname{sen} t \cos t}{4} + C = (*)$$

Si $x = \operatorname{sen} t$, entonces $t = \operatorname{arcsen} x$, y además $\cos t = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{1-x^2}$

$$\text{Por lo tanto, } (*) = \frac{\operatorname{arcsen} x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$$

Nota: La integral $\int \cos^2 t dt$ se ha realizado teniendo en cuenta la siguiente igualdad

$$\text{trigonométrica: } \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$$

Generalmente, al hacer un cambio de variable, se escribe t en función de x , en lugar de x en función de t , es decir, se hace $t = h(x)$, con lo cual será: $dt = h'(x) dx$.

Ejemplo 2

Calcular la siguiente integral: $\int \frac{10x+5}{(x^2+x)^3} dx$

Pongamos $\int \frac{10x+5}{(x^2+x)^3} dx = 5 \int \frac{2x+1}{(x^2+x)^3} dx = (*)$. Llamando $t = x^2+x$, será

$$dt = (2x+1) dx, \text{ luego: } (*) = 5 \int \frac{dt}{t^3} = 5 \int t^{-3} dt = -\frac{5}{2} t^{-2} + C = \frac{-5}{2(x^2+x)^2} + C$$

Método de integración por partes

Consiste en aplicar la fórmula de la derivabilidad del producto: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$, es decir: $u \cdot v' = (u \cdot v)' - u' \cdot v$.

Integrando en ambas partes: $\int u \cdot v' dx = \int ((u \cdot v)' - u' \cdot v) dx = \int (u \cdot v)' dx - \int u' \cdot v dx$. Así pues: $\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$, fórmula más conocida de la forma:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

que se puede memorizar así: **"Un día vi una vaca vestida de uniforme"**.

Podemos aplicar la fórmula anterior para calcular una integral del tipo $\int u dv$ siempre que sepamos calcular v y $\int v du$.

Ejemplo 3

Calcular la siguiente integral: $\int x \cos x dx$.

Esta integral es del tipo $\int u dv$, siendo: $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases}$.

De aquí se deduce que: $\begin{cases} du = dx \\ v = \text{sen} x \end{cases}$

Aplicando la fórmula de integración por partes tenemos:

$$\int x \cos x dx = x \text{sen} x - \int \text{sen} x dx = x \text{sen} x + \cos x + C$$

Ejemplo 4

Calcular la siguiente integral: $\int \text{arctg} x dx$.

Esta integral es del tipo $\int u dv$, siendo: $\begin{cases} u = \text{arctg} x \\ dv = dx \end{cases}$. De aquí se deduce:

$\begin{cases} du = \frac{1}{1+x^2} \\ v = x \end{cases}$. Aplicando la fórmula de integración por partes tenemos:

$$\int \text{arctg} x dx = x \text{arctg} x - \int \frac{1}{1+x^2} dx = x \text{arctg} x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C$$

Ejemplo 5

Calcular la siguiente integral: $\int x^p e^x dx$ siendo p un número natural.

Esta integral es del tipo $\int u dv$, siendo: $\begin{cases} u = x^p \\ dv = e^x dx \end{cases}$. De aquí se deduce que:

$\begin{cases} du = px^{p-1} dx \\ v = e^x \end{cases}$. Aplicando la fórmula de la integración por partes tenemos:

$$\int x^p e^x dx = x^p e^x - p \int x^{p-1} e^x dx$$

De esta forma el cálculo de la primera integral se ha convertido en el cálculo de otra integral del mismo tipo en la que el exponente p se ha rebajado una unidad. Realizando el proceso p veces se llega a la integral $\int e^x dx$ que es inmediata.

Otras veces, al aplicar la integración por partes llegamos a la misma integral que teníamos al principio, y entonces, podemos calcularla pasándola al primer miembro y despejándola.

Ejemplo 6

Calcular la integral: $\int \operatorname{sen}^4 x dx$.

Esta integral es del tipo $\int u dv$, siendo: $\begin{cases} u = \operatorname{sen}^3 x \\ v = \operatorname{sen} x \end{cases}$. Por lo tanto:

$\begin{cases} du = 3 \operatorname{sen}^2 x \cos x dx \\ v = -\cos x \end{cases}$. Aplicando la fórmula de integración por partes tenemos:

$$\int \operatorname{sen}^4 x dx = -\operatorname{sen}^3 x \cos x + 3 \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x dx = -\operatorname{sen}^3 x \cos x + 3 \int \operatorname{sen}^2 x (1 - \operatorname{sen}^2 x) dx =$$

$$= -\operatorname{sen}^3 x \cos x + 3 \int \operatorname{sen}^2 x dx - 3 \int \operatorname{sen}^4 x dx = (*)$$

$$= -\operatorname{sen}^3 x \cos x + \frac{3}{2} x - \frac{3}{4} \operatorname{sen} 2x - 3 \int \operatorname{sen}^4 x dx$$

Observemos que la última integral es precisamente la que queríamos calcular, luego si la pasamos al primer miembro tenemos:

$$4 \int \operatorname{sen}^4 x dx = -\operatorname{sen}^3 x \cos x + \frac{3}{2} x - \frac{3}{4} \operatorname{sen} 2x \text{ y finalmente:}$$

$$\int \operatorname{sen}^4 x dx = -\frac{1}{4} \operatorname{sen}^3 x \cos x + \frac{3}{8} x - \frac{3}{16} \operatorname{sen} 2x + C$$

Nota: En (*) se ha utilizado que $\int \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x$

Integración de funciones racionales

Una función racional es de la forma $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador, se divide el primero por el segundo, con lo cual se obtiene un cociente $A(x)$ y un resto $R(x)$.

Entonces se cumple: $P(x) = Q(x)A(x) + R(x)$, luego:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x)A(x) + R(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Ejemplo 7

Calcular la siguiente integral: $\int \frac{x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 16x^2 + 18x - 9}{x^2 - 2x - 3} dx$

Como el grado del numerador es 5 y el del denominador es 2, dividimos el primero por el segundo y obtenemos $x^3 - 7x + 2$ de cociente y $x - 3$ de resto. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 16x^2 + 18x - 9}{x^2 - 2x - 3} dx &= \int \left(x^3 - 7x + 2 + \frac{x - 3}{x^2 - 2x - 3} \right) dx = \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{7x^2}{2} + 2x + \int \frac{x - 3}{x^2 - 2x - 3} dx \end{aligned}$$

Como los polinomios son sencillos de integrar, el problema se ha reducido al cálculo de una integral del tipo $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, siendo el grado del numerador menor que el del denominador.

En primer lugar descomponemos en factores el denominador $Q(x)$. Vamos a considerar los tres casos siguientes:

1º) $Q(x)$ tiene solamente raíces reales simples

Supongamos que éstas son x_1, x_2, \dots, x_n . Entonces: $Q(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ y podemos escribir: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \dots + \frac{A_n}{x - x_n}$, donde A_1, A_2, \dots, A_n son números que se calculan de la forma que veremos en el siguiente ejemplo.

Por lo tanto:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{A_1}{x-x_1} dx + \int \frac{A_2}{x-x_2} dx + \dots + \int \frac{A_n}{x-x_n} dx =$$

$$= A_1 \ln(x-x_1) + A_2 \ln(x-x_2) + \dots + A_n \ln(x-x_n)$$

Ejemplo 8

Calcular la siguiente integral: $\int \frac{3x+2}{2x^3+9x^2+7x-6} dx$

Resolviendo la ecuación $2x^3+9x^2+7x-6=0$ encontramos sus soluciones:

$x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -2$, $x_3 = -3$ que son reales y distintas. Entonces:

$$2x^3+9x^2+7x-6 = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)(x+3) = (2x-1)(x+2)(x+3);$$

$$\frac{3x+2}{2x^3+9x^2+7x-6} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

y vamos a hallar los números A , B , C que cumplan esta condición.

La suma de las tres fracciones del segundo miembro es:

$$\frac{A(x+2)(x+3) + B(2x-1)(x+3) + C(2x-1)(x+2)}{(2x-1)(x+2)(x+3)}, \text{ y como}$$

$2x^3+9x^2+7x-6 = (2x-1)(x+2)(x+3)$, los numeradores también deberán de

ser iguales, luego: $3x+2 = A(x+2)(x+3) + B(2x-1)(x+3) + C(2x-1)(x+2)$

Esta igualdad es cierta para cualquier valor que demos a x .

En particular, si hacemos $x = \frac{1}{2}$ resulta:

$$3 \cdot \frac{1}{2} + 2 = A\left(\frac{1}{2}+2\right)\left(\frac{1}{2}+3\right) + B\left(2 \cdot \frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}+3\right) + C\left(2 \cdot \frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right); \frac{7}{2} = A \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2}$$

de donde $A = \frac{2}{5}$. Análogamente, si hacemos $x = -2$ resulta $B = \frac{4}{5}$, y si hacemos $x = -3$

resulta $C = -1$. Por lo tanto:

$$\int \frac{3x+2}{2x^3+9x^2+7x-6} dx = \int \left(\frac{2/5}{2x-1} + \frac{4/5}{x+2} + \frac{-1}{x+3} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{5} \ln(2x-1) + \frac{4}{5} \ln(x+2) - \ln(x+3) + C$$

2º) Q(x) tiene raíces reales múltiples

Supongamos que x_1 es una raíz múltiple de orden k . Eso significa que en la descomposición de $Q(x)$ aparecerá $(x-x_1)^k$. Entonces se opera de una forma similar al apartado anterior, haciendo una descomposición en suma de fracciones. La raíz x_1 dará origen a la suma de fracciones:

$$\frac{A_1}{(x-x_1)^k} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{k-1}} + \dots + \frac{A_k}{x-x_1}, \text{ donde } A_1, A_2, \dots, A_k$$

son números que se calculan de la forma que veremos en el ejemplo siguiente. Integrando la suma de fracciones anterior tenemos:

$$\int \frac{A_1}{(x-x_1)^k} dx + \int \frac{A_2}{(x-x_1)^{k-1}} dx + \dots + \int \frac{A_k}{x-x_1} dx =$$

$$= \frac{A_1}{-k+1} (x-x_1)^{-k+1} + \frac{A_2}{-k+2} (x-x_1)^{-k+2} + \dots + A_k \ln(x-x_1) + C$$

Ejemplo 9

Calcular la siguiente integral: $\int \frac{1}{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2} dx$.

Resolviendo la ecuación $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$ encontramos que sus soluciones son $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$, siendo x_1 una raíz triple, es decir:

$$x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = (x-1)^3 (x+2).$$

Luego: $\frac{1}{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+2}$, y vamos a hallar los

números A, B, C, D que cumplen esta condición. La suma de las cuatro fracciones del

segundo miembro es: $\frac{A(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)^2(x+2) + D(x-1)^3}{(x-1)^3(x+2)}$, y

como $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = (x-1)^3(x+2)$, los numeradores deberán ser iguales,

$$\text{luego: } 1 = A(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)^2(x+2) + D(x-1)^3.$$

Esta igualdad es cierta para cualquier valor que demos a x .

En particular, si hacemos $x = -2$: $1 = D(-2-1)^3 \Rightarrow 1 = -27D \Rightarrow D = -1/27$, si

hacemos $x = 1$: $1 = A(1+2) \Rightarrow 1 = 3A \Rightarrow A = 1/3$, si hacemos $x = 0$:

$$1 = 2A - 2B + 2C - D \Rightarrow -2B + 2C = 1 - 2A + D \Rightarrow -2B + 2C = \frac{8}{27}, \text{ y si hacemos}$$

$$x = 2: 1 = 4A + 4B + 4C + D \Rightarrow 4B + 4C = 1 - 4A - D \Rightarrow 4B + 4C = -\frac{8}{27}$$

Resolviendo el sistema formado por las dos últimas ecuaciones: $B = -1/9, C = 1/27$

$$\int \frac{1}{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2} dx = \int \left(\frac{1/3}{(x-1)^3} + \frac{-1/9}{(x-1)^2} + \frac{1/27}{x-1} + \frac{-1/27}{x+2} \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{6(x-1)^2} + \frac{1}{9(x-1)} + \frac{1}{27} \ln(x-1) - \frac{1}{27} \ln(x+2) + C$$

3º) Q(x) tiene raíces imaginarias simples

Entonces la descomposición en fracciones simples de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ da lugar a fracciones de la forma $\frac{hx+k}{ax^2+bx+c}$, donde h, k son números que se calculan de la forma que veremos en los ejemplos siguientes, y las raíces de ax^2+bx+c son imaginarias.

Veamos cómo se calcula la integral $\int \frac{hx+k}{ax^2+bx+c} dx$.

Vamos a distinguir dos casos, según que sea o no sea nulo el valor de h del numerador $hx+k$.

$$h = 0$$

Entonces aplicamos al denominador el método del completamiento del cuadrado. De esta forma, el denominador ax^2+bx+c toma la forma $a((x+m)^2+n^2)$.

$$\begin{aligned} \text{Así pues, } \int \frac{k}{ax^2+bx+c} dx &= \int \frac{k}{a((x+m)^2+n^2)} dx = \frac{k}{a} \int \frac{1}{(x+m)^2+n^2} dx = \\ &= \frac{k}{an^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x+m}{n}\right)^2+1} dx = (*). \quad \text{Si hacemos ahora el cambio de variable:} \\ t = \frac{x+m}{n}; dt &= \frac{dx}{n}. \text{ Entonces } (*) = \frac{k}{an} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{k}{an} \operatorname{arctg} t + C = \frac{k}{an} \operatorname{arctg} \left(\frac{x+m}{n}\right) + C \end{aligned}$$

Ejemplo 10

Calcular la siguiente integral: $\int \frac{5}{2x^2-12x+26} dx$

Aplicando el método del completamiento del cuadrado al polinomio $2x^2-12x+26$:

$$2x^2-12x+26 = 2(x^2-6x+13) = 2(x^2-2x+3^2-3^2+13) = 2((x-3)^2+4)$$

$$\text{Por lo tanto, } \int \frac{5}{2x^2-12x+26} dx = \int \frac{5 dx}{2((x-3)^2+4)} = \frac{5}{2} \int \frac{dx}{(x-3)^2+4}$$

$$= \frac{5}{2 \cdot 4} \int \frac{dx}{\frac{(x-3)^2}{4}+1} = \frac{5}{2 \cdot 4} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2+1} = (*)$$

Haciendo el cambio de variable: $t = \frac{x-3}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2} dx \Rightarrow dx = 2 dt$ tenemos:

$$(*) = \frac{5}{8} \int \frac{2 dt}{t^2+1} = \frac{10}{8} \operatorname{arctg} t + C = \frac{5}{4} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-3}{2}\right) + C$$

h 0

Entonces descomponemos el numerador $hx + k$ buscando una expresión que sea la derivada del denominador (es decir, $2ax + b$), y procedemos de la siguiente forma:

$$hx + k = h \left(x + \frac{k}{h} \right) = \frac{h}{2a} \left(2ax + \frac{2ak}{h} \right) = \frac{h}{2a} \left(2ax + b - b + \frac{2ak}{h} \right), \text{ y llamando } p = \frac{2ak}{h} - b,$$

tenemos:
$$\int \frac{hx + k}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{h}{2a} \int \frac{2ax + b + p}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{h}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx +$$

$$+ \frac{h}{2a} \int \frac{p}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{h}{2a} \ln|ax^2 + bx + c| + \frac{h}{2a} \int \frac{p}{ax^2 + bx + c} dx.$$

Esta última integral carece de término en x en el numerador, luego se calcula por el procedimiento visto en el apartado anterior, para $h = 0$.

Ejemplo 11

Calcular la siguiente integral:
$$\int \frac{4x+3}{x^2+2x+50} dx$$

Teniendo en cuenta que la derivada del denominador es $2x + 2$, transformamos el numerador de la siguiente forma:

$$4x+3 = 4 \left(x + \frac{3}{4} \right) = \frac{4}{2} \left(2x + \frac{3}{2} \right) = 2 \left(2x + 2 - 2 + \frac{3}{2} \right) = 2(2x+2) - 1$$

Por lo tanto:

$$\int \frac{4x+3}{x^2+2x+50} dx = \int \frac{2(2x+2)-1}{x^2+2x+50} dx = 2 \int \frac{2x+2}{x^2+2x+50} dx - \int \frac{1}{x^2+2x+50} dx =$$

$$= 2 \ln(x^2+2x+50) - \int \frac{1}{x^2+2x+50} dx. \text{ Esta última integral se calcula así:}$$

$$x^2+2x+50 = x^2+2 \cdot x \cdot 1+50 = x^2+2 \cdot x \cdot 1+1^2-1^2+50 = (x+1)^2+49$$

Entonces:
$$\int \frac{1}{x^2+2x+50} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+49} dx = \frac{1}{49} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{7}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{49} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{7}\right)^2+1} = \frac{1}{7} \int \frac{1/7}{\left(\frac{x+1}{7}\right)^2+1} dx = \frac{1}{7} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{7}\right) + C$$

Finalmente tenemos:

$$\int \frac{4x+3}{x^2+2x+50} dx = 2 \ln(x^2+2x+50) - \frac{1}{7} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{7}\right) + C$$

Ejemplo 12

Calcular la siguiente integral: $\int \frac{x^2 + 15x - 38}{x^3 - 7x^2 + 9x + 17} dx$.

Resolviendo la ecuación $x^3 - 7x^2 + 9x + 17 = 0$ encontramos que tiene $x_1 = -1$ como única solución real. Entonces: $x^3 - 7x^2 + 9x + 17 = (x+1)(x^2 - 8x + 17)$.

Así pues: $\frac{x^2 + 15x - 38}{x^3 - 7x^2 + 9x + 17} = \frac{A}{x+1} + \frac{hx + k}{x^2 - 8x + 17}$ y vamos a hallar los números

A , h y k que cumplen esta condición.

La suma de las dos fracciones del segundo miembro es:

$$\frac{A(x^2 - 8x + 17) + (hx + k)(x+1)}{(x+1)(x^2 - 8x + 17)},$$

luego: $x^2 + 15x - 38 = A(x^2 - 8x + 17) + (hx + k)(x+1)$.

Esta igualdad es cierta para todo valor que le demos a x .

En particular, si hacemos $x = -1$, resulta: $-52 = A \cdot 26$, de donde $A = -2$.

Análogamente, si hacemos $x = 0$ resulta $k = -4$, y si hacemos $x = 1$ resulta $h = 3$.

Por lo tanto: $\int \frac{x^2 + 15x - 38}{x^3 - 7x^2 + 9x + 17} dx = \int \frac{-2}{x+1} dx + \int \frac{3x - 4}{x^2 - 8x + 17} dx$.

La primera de estas dos integrales es: $-2 \ln(x+1)$.

Para calcular la segunda integral tengamos en cuenta que la derivada del denominador es $2x - 8$, luego el numerador se transforma así:

$$3x - 4 = 3\left(x - \frac{4}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(2x - \frac{8}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(2x - 8 + 8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{3}{2}(2x - 8) + 8, \text{ y la}$$

segunda de las dos integrales anteriores se convierte en:

$$\frac{3}{2} \int \frac{2x - 8}{x^2 - 8x + 17} dx + 8 \int \frac{1}{x^2 - 8x + 17} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x - 8}{x^2 - 8x + 17} dx + 8 \int \frac{1}{(x-4)^2 + 1} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2 - 8x + 17) + 8 \operatorname{arctg}(x-4).$$

Por lo tanto, finalmente tenemos:

$$\int \frac{x^2 + 15x - 38}{x^3 - 7x^2 + 9x + 17} dx = -2 \ln(x+1) + \frac{3}{2} \ln(x^2 - 8x + 17) + 8 \operatorname{arctg}(x-4) + C$$