

## Integrales inmediatas. Integral indefinida. Cálculo de áreas

### 1. Concepto de primitiva. Propiedades

Se dice que  $F$  es una primitiva de  $f$  si la derivada de  $F$  es  $f$ . Por ejemplo  $F(x) = x^2$  es una primitiva de  $f(x) = 2x$ , porque  $F'(x) = f(x)$ .

Toda función admite infinitas primitivas que se diferencian entre sí en una constante aditiva, llamada *constante de integración*. Dichas primitivas se representan mediante

$$\int f(x) dx$$

donde el símbolo  $\int$  se lee "integral" y  $dx$ , "diferencial de  $x$ "; este último tiene por objeto designar la variable respecto de la cual se realiza la integración. Así pues, en el ejemplo anterior pondremos:  $\int 2x dx = x^2 + C$  ( $C$  es la constante de integración; recuérdese que la derivada de una constante es 0)

Así como hay una regla de derivación para cada una de las operaciones suma, resta, producto por escalares, multiplicación, división y composición (regla de la cadena), desgraciadamente, para la integración sólo hay reglas para las tres primeras operaciones:

$$\begin{aligned} \int (f(x) + g(x)) dx &= \int f(x) dx + \int g(x) dx \\ \int (f(x) - g(x)) dx &= \int f(x) dx - \int g(x) dx \\ \int kf(x) dx &= k \int f(x) dx \end{aligned}$$

### 2. Tabla de primitivas. Integrales inmediatas

Integrales inmediatas	Ejemplos
<p>1. <math>\int dx = x + C</math></p>	<p>ü <math>\int \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx = \frac{1}{2} x + C</math></p>
<p>2. <math>\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C</math>, si <math>n</math> es distinto de <math>-1</math>.</p>	<p>ü <math>\int 5x^4 dx = 5 \int x^4 dx = 5 \frac{x^5}{5} + C = \frac{5}{4} x^4 + C</math></p> <p>ü <math>\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C</math></p> <p style="margin-left: 20px;"><math>= \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C</math></p> <p>ü <math>\int \frac{x^3 + x^{-2}}{x^5} dx = \int \left( \frac{x^3}{x^5} + \frac{x^{-2}}{x^5} \right) dx = \int (x^{-2} + x^{-7}) dx</math></p> <p style="margin-left: 20px;"><math>= \int x^{-2} dx + \int x^{-7} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-6}}{-6} + C =</math></p> <p style="margin-left: 20px;"><math>= -\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^6} + C</math></p>

$\int f'(x) \cdot [f(x)]^n dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$ <p>si <math>n \neq -1</math></p>	$\ddot{u} \int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \frac{1}{x} \ln^2 x dx = \frac{\ln^3 x}{3} + C$ <p>(recuérdese que si <math>f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}</math>)</p>
<p><b>3.</b> <math>\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln x  + C</math></p> $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x)  + C$	$\ddot{u} \int \frac{1}{5x} dx = \int \frac{1}{5} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{5} \ln x  + C$ $\ddot{u} \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} dx = \int \operatorname{sen} x \frac{1}{\operatorname{cos} x} dx =$ $= - \int -\operatorname{sen} x \frac{1}{\operatorname{cos} x} dx = - \ln \operatorname{cos} x  + C$ <p>(recordemos que la derivada del coseno es el "menos seno")</p>
<p><b>4.</b> <math>\int e^x dx = e^x + C</math></p> $\int f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$	$\ddot{u} \int (-3e^x) dx = -3 \int e^x dx = -3e^x + C$ $\ddot{u} \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx = e^{\sqrt{x}} + C$ <p>(aquí hay que recordar como se deriva la raíz cuadrada)</p>
<p><b>5.</b> <math>\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C</math></p> $\int f'(x) \cdot a^{f(x)} dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$	$\ddot{u} \int \frac{4^x}{3} dx = \int \frac{1}{3} 4^x dx = \frac{1}{3} \int 4^x dx = \frac{1}{3} \frac{4^x}{\ln 4} + C =$ $= \frac{4^x}{3 \ln 4} + C = \frac{4^x}{\ln 4^3} + C = \frac{4^x}{\ln 64} + C$ $\ddot{u} \int \operatorname{cos} x 2^{\operatorname{sen} x} dx = \frac{2^{\operatorname{sen} x}}{\ln 2} + C$
<p><b>6.</b> <math>\int \operatorname{cos} x dx = \operatorname{sen} x + C</math></p> $\int f'(x) \cdot \operatorname{cos} f(x) dx =$ $= \operatorname{sen} f(x) + C$	$\ddot{u} \int (2x^4 + 5 \operatorname{cos} x) dx = 2 \frac{x^5}{5} + 5 \operatorname{sen} x + C =$ $= \frac{x^5}{2} + 5 \operatorname{sen} x + C$ $\ddot{u} \int \operatorname{cos} x \operatorname{cos}(\operatorname{sen} x) dx = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) + C$
<p><b>7.</b> <math>\int \operatorname{sen} x dx = -\operatorname{cos} x + C</math></p> $\int f'(x) \cdot \operatorname{sen} f(x) dx =$ $= -\operatorname{cos} f(x) + C$	$\ddot{u} \int (2 \operatorname{cos} x - 3 \operatorname{sen} x) dx = 2 \operatorname{sen} x - 3(-\operatorname{cos} x) + C =$ $= 2 \operatorname{sen} x + 3 \operatorname{cos} x + C$ $\ddot{u} \int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x} dx = \int \frac{1}{x} \operatorname{sen}(\ln x) dx = -\operatorname{cos}(\ln x) + C$
<p><b>8.</b> <math>\int \operatorname{sec}^2 x dx = \int \frac{1}{\operatorname{cos}^2 x} dx =</math></p> $= \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = \operatorname{tg} x + C$	$\ddot{u} \int \frac{1 + \operatorname{cos}^3 x}{\operatorname{cos}^2 x} dx = \int \left( \frac{1}{\operatorname{cos}^2 x} + \frac{\operatorname{cos}^3 x}{\operatorname{cos}^2 x} \right) dx =$ $= \int (\operatorname{sec}^2 x + \operatorname{cos} x) dx = \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x + C$

$\int f'(x) \cdot [1 + \operatorname{tg}^2 f(x)] dx =$ $= \int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \operatorname{tg} f(x) + C$	$\ddot{u} \int \frac{1}{x \cos^2(\ln x)} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\cos^2(\ln x)} dx =$ $= \operatorname{tg}(\ln x) + C$
<p><b>9.</b> <math>\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} x + C</math></p> $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} f(x) + C$	$\ddot{u} \int \frac{5}{x^2 + 4} dx = \int \frac{5/4}{(x^2 + 4)/4} dx = 5 \int \frac{1/4}{\frac{x^2}{4} + \frac{4}{4}} dx =$ $= \frac{5}{2} \int \frac{1/2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} dx = \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$
<p><b>10.</b> <math>\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + C</math></p> $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx = \operatorname{arcsen} f(x) + C$	$\ddot{u} \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int \frac{x dx}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{\sqrt{1-(x^2)^2}} =$ $= \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} x^2 + C$
<p><b>11.</b> <math>\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arccos} x + C</math></p> $\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx = \operatorname{arccos} f(x) + C$	$\ddot{u} \int \frac{-\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} dx = \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arccos} x + C$ $\ddot{u} \int \frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \int \frac{-e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}} dx = \operatorname{arccos} e^x + C$
<p><b>12.</b> <math>\int \ln x dx = x \ln x - x + C</math></p> $\int \log_a x = \frac{1}{\ln a} (x \ln x - x) + C$ $\int f'(x) \cdot \ln f(x) dx =$ $= f(x) \cdot \ln f(x) - f(x) + C$	$\ddot{u} \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \int \frac{1}{x} \ln(\ln x) dx =$ $= \ln x \cdot \ln(\ln x) - \ln x + C$
<p><b>13.</b> <math>\int \operatorname{tg} x dx = -\ln  \cos x  + C</math></p> $\int f'(x) \cdot \operatorname{tg} f(x) dx =$ $= -\ln  \cos f(x)  + C$	$\ddot{u} \int \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx =$ $= 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{tg} \sqrt{x} dx = -2 \ln  \sqrt{x}  + C$

Combinando las reglas de integración para la suma y diferencia de funciones, la integral de un escalar por una función (dadas en el primer recuadro) y las integrales inmediatas dadas en la tabla anterior se pueden calcular multitud de integrales de forma inmediata. En los ejemplos se han visto algunas. De todas formas veamos un ejemplo más:

$$\int \left( e^{3x} + 5 \frac{\sqrt{x}}{x} \right) dx = \int e^{3x} dx + 5 \int \frac{x^{1/2}}{x} dx = \frac{1}{3} \int 3e^{3x} + 5 \int x^{-1/2} dx = \frac{1}{3} e^{3x} + 5 \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{3} e^{3x} + \frac{2}{5} \sqrt{x} + C = \frac{5e^{3x} + 6\sqrt{x}}{15} + C$$

Lógicamente, existen "trucos" y formas de utilizar herramientas matemáticas (potencias, raíces, polinomios, trigonometría, logaritmos, etc.) que son extremadamente útiles para dominar el cálculo integral. De todas formas sólo el tesón y la constancia hacen posible saber integrar con éxito.

### 3. Integrales definidas

Hay varias maneras de definir  $\int_a^b f(x) dx$  (léase "integral definida de  $f$  entre  $a$  y  $b$ ", o simplemente "integral entre  $a$  y  $b$ "). No vamos a entrar (por ahora) en ello. Sin embargo, y en cualquier caso, se cumple la **regla de Barrow**, que dice: si  $F$  es una primitiva cualquiera de  $f$ , entonces

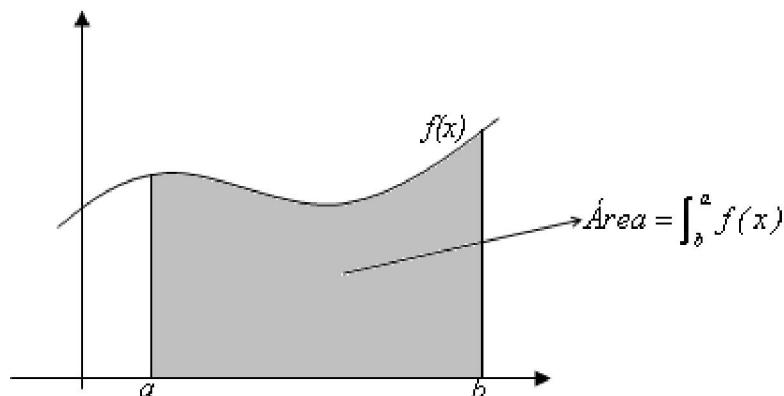
$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)}$$

Por razones prácticas se introduce el símbolo  $[F(x)]_a^b$  que representa la diferencia

$$F(b) - F(a). \text{ Por ejemplo: } \int_1^3 2x dx = [x^2]_1^3 = 3^2 - 1^2 = 8.$$

### 4. Cálculo de áreas mediante integrales

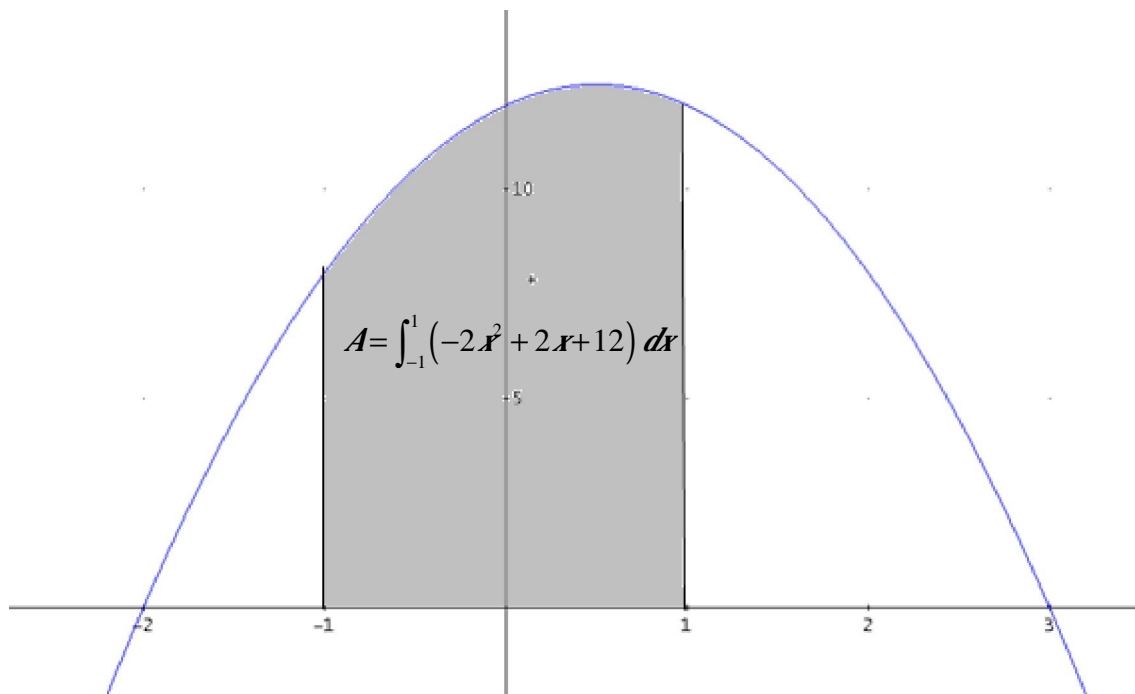
Geoméricamente, la integral definida entre  $a$  y  $b$  de una función  $f$  es el área del recinto encerrado entre la gráfica de la función  $f$ , las rectas verticales  $x = a$  y  $x = b$ , y el eje  $X$ .



Por ejemplo, el área del recinto encerrado por la parábola  $f(x) = -2x^2 + 2x + 12$ , las

$$\text{rectas } x = 1, x = -1 \text{ y el eje } X, \text{ es } A = \int_{-1}^1 (-2x^2 + 2x + 12) dx \left[ -\frac{2x^3}{3} + x^2 + 12x \right]_{-1}^1 =$$

$$= \left( -\frac{2}{3} + 1 + 12 \right) - \left( \frac{2}{3} + 1 - 12 \right) = \frac{68}{3} \cong 22,67 \text{ u}^2 \text{ (unidades cuadradas):}$$



Sin embargo, cuando al calcular el área comprendida entre una curva  $y = f(x)$ , el eje  $X$  y las dos abscisas  $x = a$  y  $x = b$ , simplemente calculamos  $\int_a^b f(x)$ , nos podemos encontrar con casos como los siguientes:

Entonces, el resultado de la integral no representa el área buscada. Ello es debido a las compensaciones que se producen de las partes positivas con las negativas.

La forma de proceder será calcular, por separado, las integrales de los diversos sectores y, posteriormente, sumar sus valores absolutos.

Por tanto, para calcular el área comprendida entre la curva  $f(x)$ , el eje  $X$  y las abscisas  $x = a$  y  $x = b$ , conviene dar los siguientes pasos:

- I.** Resolver la ecuación  $f(x) = 0$  para averiguar los puntos de corte de la curva con el eje  $X$ .
- II.** Seleccionar, de entre las raíces de la ecuación anterior, aquellas que estén comprendidas entre  $a$  y  $b$ . Imaginemos que estas raíces, ordenadas de menor a mayor, son  $x_1, x_2, x_3$ . Es decir, se cumple:  $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$ .
- III.** Buscar una primitiva de  $f(x)$ . Llamémosla  $F(x)$ .
- IV.** Calcular  $F(a)$ ,  $F(x_1)$ ,  $F(x_2)$ ,  $F(x_3)$  y  $F(b)$ .
- V.**  $F(x_1) - F(a)$ ,  $F(x_2) - F(x_1)$ ,  $F(x_3) - F(x_2)$  y  $F(b) - F(x_3)$  son las integrales de los cuatro recintos en los que queda dividida el área buscada.

Sus áreas son los valores absolutos de estas cantidades y el área buscada es la suma de ellas.

Observemos que, con estos pasos, no es necesario dibujar la curva.

**Ejemplo:**

**Calcular el área de la región del plano limitada por la curva  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$  y el eje  $X$ .**

**I.** Las soluciones de la ecuación  $x^3 - 6x^2 + 8x = 0$  son  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 4$ . Por tanto estos son los puntos donde la curva corta al eje  $X$ .

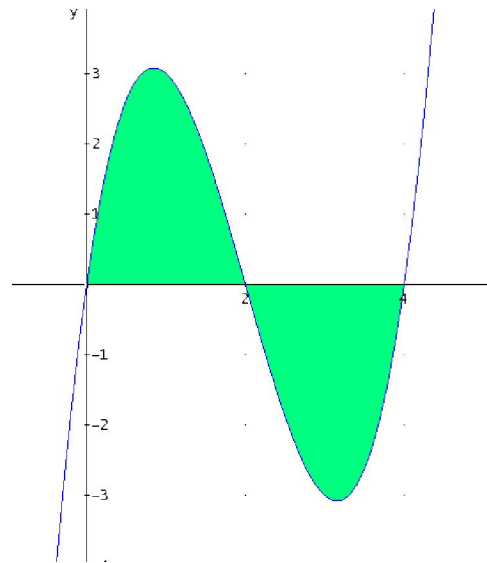
**II.** Como nos piden el área de la región del plano limitada por la curva y el eje  $X$ , tendremos que calcularla precisamente entre los puntos  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 4$ .

**III.** Busquemos una primitiva de  $f(x)$ :

$$F(x) = \int (x^3 - 6x^2 + 8x) dx = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2$$

**IV.**  $F(0) = 0$ ,  $F(2) = 4$ ,  $F(4) = 0$

**V.**  $F(2) - F(0) = 4$ ,  $F(4) - F(2) = -4$ . El área buscada es  $4 + |-4| = 8 \text{ u}^2$



Observa la gráfica, pero es innecesaria para obtener el área pedida.

### 5. Área comprendida entre dos curvas

El área comprendida entre dos curvas,  $f$  y  $g$ , es igual al área comprendida entre la función diferencia,  $f - g$ , y el eje  $X$ .

**Ejemplo**

**Calcular el área del recinto delimitado o comprendido por la recta  $y = 2x + 1$  y la parábola  $y = x^2 - 4x + 1$ .**

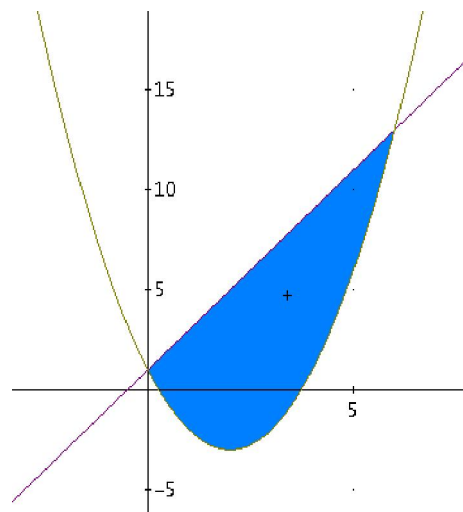
Llamamos  $f(x) = 2x + 1$ ,  $g(x) = x^2 - 4x + 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (f - g)(x) = -x^2 + 6x.$$

Iguales a cero:  $-x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ó  $x = 6$ .

Hallamos una primitiva de  $f - g$ :

$$F(x) = \int (-x^2 + 6x) dx = -\frac{x^3}{3} + 3x^2$$



$F(0) = 0$ ,  $F(6) = 36$ . Por tanto el área pedida es  $|F(6) - F(0)| = 36 \text{ u}^2$