Tema 2: Polinomios

1. Polinomios

Se llama *polinomio con coeficientes reales en la indeterminada x* a toda expresión finita de la forma:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

donde a_0, a_1, a_2, ... , $a_n \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$.

Los números reales a_0, a_1, a_2, ... , a_n reciben el nombre de *coeficientes* del polinomio y cada uno de los sumandos de la forma $a_i x^i$ que componen el polinomio se denomina *término de grado i*. El polinomio cuyos coeficientes son todos nulos se llama *polinomio nulo* y se denota por $0(x)$ o simplemente por 0.

Se define el *grado de un polinomio* distinto del nulo como el exponente *n* de la máxima potencia de la indeterminada

Al término de mayor grado, $a_n x^n$, se le llama *término principal* del polinomio y a su coeficiente, a_n, *coeficiente líder*. El coeficiente a_0 recibe el nombre de *término independiente*.

Si en un polinomio no aparecen los términos de algún o algunos grados es porque el coeficiente correspondiente a ellos es cero y dichos términos no se escriben.

Cuando todos los coeficientes del polinomio son no nulos se dice que se trata de un *polinomio completo*.

Según el número de términos que componen un polinomio se establece la siguiente nomenclatura para algunos de ellos:

- **Monomio:** si todos los coeficientes son nulos excepto uno, es decir, que el polinomio está formado por un único término.
- **Binomio:** cuando todos los coeficientes son nulos excepto dos y, por tanto, el polinomio está formado por dos términos.
- **Trinomio:** cuando todos los coeficientes son nulos excepto tres y, por tanto, el polinomio está formado por tres términos.

Se dice que $P(x)$ y $Q(x)$ son *polinomios iguales* si los dos polinomios tienen el mismo grado y además son iguales entre sí los coeficientes de los términos del mismo grado de ambos polinomios.

Dado un polinomio $P(x)$ se llama *valor numérico del polinomio* para $x = a$, y se escribe $P(a)$, al número que se obtiene al sustituir la variable x por el número real *a*.

Ejemplo

- El valor numérico de $P(x)=5x^2-3x+6$ para $x=2$ es

$$P(2)=5\cdot 2^3-3\cdot 2+6=20$$

- Supongamos que $Q(x)=x^3+2x^2-ax+5$, que $Q(-1)=3$, y queremos hallar el valor de a. Tenemos por un lado que $Q(-1)=(-1)^3+2(-1)^2-a(-1)+5=$ $=-1+2+a+5=6+a$ y por otro que $Q(-1)=3$, por tanto $6+a=3 \Rightarrow a=-3$

2. Operaciones con polinomios

2.1. Suma y resta

Sumar dos o más polinomios consiste simplemente en agrupar los términos del mismo grado y aplicar la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

Es decir, dados dos polinomios

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n \text{ y } Q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n$$

se llama *polinomio suma* de $P(x)$ y $Q(x)$ al polinomio:

$$P(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\ldots+(a_n+b_n)x^n$$

Hemos supuesto en la definición anterior que los dos polinomios tienen el mismo grado ya que, en caso contrario, es suficiente con añadir a uno de los polinomios los términos nulos necesarios.

Como la definición de la suma de polinomios se basa en la suma de sus coeficientes, que son números reales, verifica las mismas propiedades que la suma de dichos números:

- **Asociativa:** dados tres polinomios $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ se verifica que:

$$\left[P(x)+Q(x)\right]+R(x)=P(x)+\left[Q(x)+R(x)\right]$$

- **Conmutativa:** dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ se verifica que:

$$P(x)+Q(x)=Q(x)+P(x)$$

- **Elemento neutro:** llamemos 0 al polinomio que tiene todos sus coeficientes nulos (en realidad este polinomio es el número 0, y por eso se escribe igual). Entonces, dado cualquier polinomio $P(x)$ se verifica que:

$$P(x)+0=P(x)$$

- **Elemento opuesto:** para cualquier polinomio $P(x)$ existe $-P(x)$ (opuesto del polinomio $P(x)$, que se obtiene cambiando de signo todos los coeficientes del polinomio $P(x)$), tal que:

$$P(x)+\left[-P(x)\right]=0$$

Para restar dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ se suma al primero el opuesto del segundo, es decir $P(x)-Q(x)=P(x)+\left[-Q(x)\right]$.

2.2. Producto

Para multiplicar dos polinomios nos basamos en el producto de dos monomios, que se efectúa de la forma siguiente: si ax^n y bx^m son dos monomios con coeficientes reales, su producto es el monomio abx^{n+m}, teniendo en cuenta el producto de potencias de la misma base.

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, se define su ***producto***, y se designa $P(x)Q(x)$, como el polinomio que resulta al sumar los productos de cada monomio de $P(x)$ por cada monomio de $Q(x)$.

Ejemplo

Si $P(x)=3x+5$ y $Q(x)=4x^2-5x+6$, su producto es:

$$P(x)Q(x)=3x\cdot 4x^2+3x\cdot(-5x)+3x\cdot 6+5\cdot 4x^2+5\cdot(-5x)+5\cdot 6=12x^3-15x^2+$$
$$+18x+20x^2-25x+30=12x^3+5x^2-7x+30$$

Teniendo en cuenta las propiedades de la suma y del producto de números reales, es fácil deducir que el producto de polinomios verifica las siguientes propiedades:

- **Asociativa:** dados tres polinomios $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ se verifica que:

$$\left[P(x)Q(x)\right]R(x)=P(x)\left[Q(x)R(x)\right]$$

- **Conmutativa:** dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ se verifica que:

$$P(x)Q(x)=Q(x)P(x)$$

- **Elemento neutro:** llamemos 1 al polinomio que tiene todos sus coeficientes nulos salvo el término independiente, que vale 1 (en realidad este polinomio es el número 1, y por eso se escribe igual). Entonces dado cualquier polinomio $P(x)$ se tiene que:

$$P(x)=1\cdot P(x)$$

También se puede hablar del *producto de un número real por un polinomio* pero, en realidad, no es más que el producto de dos polinomios, uno de los cuales es un monomio constante.

Ejemplo

Si $P(x)=5-3x+4x^2 \Rightarrow 3P(x)=3\cdot 5+3\cdot(-3x)+3\cdot 4x^2=15-9x+12x^2$

2.3. División

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)\neq 0$, la ***división*** de $P(x)$ (dividendo) entre $Q(x)$ (divisor) es el proceso seguido para hallar los únicos polinomios $C(x)$ (cociente) y

$R(x)$ (resto) tales que: $P(x)=Q(x)C(x)+R(x)$, cumpliendo además que grado$\left[R(x)\right]<$ grado$\left[C(x)\right]$. Recuerda: "*dividendo es igual a divisor por cociente más el resto y además el grado del resto es menor que el grado del cociente*".

Para efectuar la división se realiza el proceso siguiente:

1. Se ordenan los términos de los polinomios, dividendo y divisor, de mayor a menor grado.
2. Se divide el primer término del dividendo entre el primero del divisor, obteniéndose el primer término del cociente.
3. Se multiplica el primer término del cociente por el divisor y el resultado se resta del dividendo, obteniéndose un resto parcial.
4. Tomando este resto como dividendo se vuelve a repetir el proceso para calcular el segundo término del cociente. Se repite el proceso tantas veces como sea necesario hasta que se obtenga un resto parcial de grado inferior al del divisor. Este último resto parcial es el resto de la división.

Ejemplo

Vamos a dividir $P(x)=3x^5+6x^4-x^3+13x^2-x+4$ entre $Q(x)=3x^2+2$

$$
\begin{array}{r|l}
3x^5+6x^4-x^3+13x^2-x+4 & 3x^2+2 \\ \cline{2-2}
-3x^5 \qquad -2x^3 \qquad\qquad\qquad & x^3+2x^2-x+3 \\ \cline{1-1}
6x^4-3x^3+13x^2-x+4 & \\
-6x^4 \qquad -4x^2 \qquad\quad & \\ \cline{1-1}
-3x^3+9x^2-x+4 & \\
3x^3 \qquad +2x \quad & \\ \cline{1-1}
9x^2+x+4 & \\
-9x^2 \qquad -6 & \\ \cline{1-1}
x-2 &
\end{array}
$$

Así, el cociente es $C(x)=x^3+2x^2-x+3$ y el resto es $R(x)=x-2$.

3. Regla de Ruffini

Un caso particular de la división de polinomios es aquel en el cual el divisor es un polinomio de la forma $x-a$, siendo a un número real.

Para efectuar dicha operación, además del proceso habitual de división, se puede utilizar un método especial, más sencillo y rápido, conocido como *regla de Ruffini*.

Para mostrar su mecanismo de una forma más clara vamos a suponer que tenemos los polinomios $P(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ y $Q(x)=x-a$. El procedimiento será el mismo para cualquier grado de $P(x)$.

En primer lugar, si no lo estuvieran, se ordenan los términos del dividendo $P(x)$ de mayor a menor grado. Si en el dividendo falta el término de algún grado, se pone cero en su lugar correspondiente. Se baja el primer término a_4, que será también el primer término del cociente y a partir de ahora lo llamaremos b_3. Se multiplica a por b_3 y se coloca el producto bajo a_3. El siguiente término del cociente (que lo llamaremos b_2) es la suma $a_3+a\cdot b_3$. El proceso se repite hasta el último término. Has de observar que el cociente tiene un grado menos que el dividendo. El resto es de grado cero, o lo que es lo mismo, un número real. Veámoslo gráficamente:

	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
a		$a\cdot b_3$	$a\cdot b_2$	$a\cdot b_1$	$a\cdot b_0$
	$a_4=b_3$	$a_3+a\cdot b_3=b_2$	$a_2+a\cdot b_2=b_1$	$a_1+a\cdot b_1=b_0$	$a_0+a\cdot b_0=R$

Es más difícil explicar el procedimiento para llevar a cabo la regla de Ruffini que verlo con un ejemplo:

Ejemplo

Vamos a dividir $P(x)=8x^5+6x^4-2x^2+x-5$ entre $Q(x)=x-2$

	8	6	0	–2	1	–5
2		16	44	88	172	346
	8	22	44	86	173	341

Así el cociente es $8x^4+22x^3+44x^2+86x+173$ y el resto es $R = 341$

Para dividir un polinomio $P(x)$ cualquiera entre uno de la forma $Q(x)=x+a$, también se puede utilizar la regla de Ruffini, teniendo en cuenta que $x+a=x-(-a)$.

En relación con la regla de Ruffini, existe un importante teorema que mostramos a continuación:

Teorema del Resto

El resto r de la división de un polinomio $P(x)$ entre $Q(x)=x-a$ coincide con el valor numérico de $P(x)$ para $x=a$, es decir, $R=P(a)$.

Demostración:

En efecto, si al efectuar la regla de Ruffini obtenemos que $C(x)$ es el cociente de la división y que r es el resto, se deduce que $P(x)=C(x)(x-a)+R$ (recuerda: dividendo es igual a divisor por cociente más el resto). Sustituyendo la variable x por a, se tiene que $P(a)=C(a)(a-a)+R=C(a)\cdot 0+R=0+R=R$. †

4. Raíces de un polinomio. Factorización de polinomios

Un número real *r* es una *raíz* de un polinomio $P(x)$ si el valor numérico del polinomio para $x=r$ es cero, es decir: *r* es raíz de $P(x) \Leftrightarrow P(r)=0$.

Las raíces de un polinomio pueden ser de distintos tipos:

- **Simples:** cuando todas las raíces de $P(x)$ son distintas entre sí.
- **Múltiples:** si $P(x)$ tiene *p* raíces iguales a *r*, se dice que *r* es una raíz múltiple de orden *p* (en particular, si *p* toma el valor 2, diremos que *r* es una raíz doble).

Proposición

Las raíces enteras de un polinomio cuyos coeficientes son enteros se encuentran entre los divisores del término independiente.

Demostración:

En efecto, supongamos que $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ tiene coeficientes enteros y que *r* es una raíz de este polinomio. Entonces:

$$P(r)=a_0+a_1r+a_2r^2+...+a_nr^n \Leftrightarrow a_0+r\left(a_1+a_2r+...+a_nr^{n-1}\right)=0$$

Despejando el término independiente:

$$a_0=-r\left(a_1+a_2r+...+a_nr^{n-1}\right) \Leftrightarrow \frac{a_0}{r}=-\left(a_1+a_2r+...+a_nr^{n-1}\right)$$

Al ser los coeficientes de $P(x)$ y *r* números enteros, también lo es $a_1+a_2r+...+a_nr^{n-1}$ y, por tanto, *r* divide a a_0. †

Además, ya sabemos que al aplicar la regla de Ruffini para dividir un polinomio $P(x)$ entre $x-a$, el resto de la división coincide con $P(a)$ (por el teorema del resto). Luego, si *r* es una raíz de $P(x)$ y dividimos este polinomio entre $x-r$, el resto de la división será cero.

Ejemplo

Si $P(x)=x^2-x-2$, sus raíces serán divisores de -2 y, por tanto, pueden estar entre los valores $\{-1,1,-2,2\}$. Al hacer por la regla de Ruffini las divisiones de $P(x)$ entre $x+1$ y entre $x-2$, en ambas se obtiene de resto cero y, de esta forma, deducimos que las raíces de $P(x)$ son -1 y 2.

Como consecuencia de lo anterior deducimos la siguiente

Proposición

Si r es una raíz de $P(x)$, este polinomio será divisible por $x-r$.

Demostración:

Efectivamente, dividiendo el polinomio entre $x-r$ se obtiene $P(x)=(x-r)C(x)+R$ donde $C(x)$ es el cociente de la división y $R=P(r)=0$, por ser *r* raíz de $P(x)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow\ P(x)=(x-r)C(x)$ y de esta igualdad se deduce que $P(x)$ es divisible por $x-r$. †

Al mismo tiempo, es posible que $C(x)$ tenga más raíces, con lo que puede descomponerse en más factores de la misma forma que $P(x)$ y, así sucesivamente, podemos generalizar la siguiente consecuencia:

Si un polinomio $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ de grado n admite n raíces reales r_1, r_2, ..., r_n, se descompone de forma única como el producto:

$$P(x)=a_n(x-r_1)(x-r_2)...(x-r_n)$$

Ejemplo

Vamos a buscar la descomposición factorial del polinomio

$P(x)=x^5-13x^4+57x^3-83x^2-34x+120$

Como el término independiente es 120 probamos a buscar las raíces, y empezamos por 1. Como el resto no es cero (es 48, ¡compruébalo!), 1 no es raíz y probamos ahora con –1:

	1	–13	57	–83	–34	120
–1		–1	14	–71	154	–120
	1	–14	71	–154	120	0

Obtenemos que –1 es una de las raíces de $P(x)$. Para hallar otra, aplicamos la regla de Ruffini al cociente de la división anterior y así sucesivamente:

	1	–14	71	–154	120
2		2	–24	94	–120
	1	–12	47	–60	0

	1	–12	47	–60
3		3	–27	60
	1	–9	20	0

Llegados a este término, podemos seguir aplicando el mismo procedimiento o, directamente, podemos resolver la ecuación de segundo grado $x^2-9x+20=0$. En cualquier caso se obtienen otras dos raíces que son 4 y 5. Se concluye pues que las raíces de $P(x)$ son –1, 2, 3, 4 y 5, y como el coeficiente líder es 1, la factorización del polinomio es $P(x)=(x+1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$

Cuando no todas las raíces de un polinomio son reales, no podemos descomponerlo en factores lineales (o de grado uno)

Ejemplo

Si intentamos factorizar $P(x)=2x^4+2x^3-2x-2$, se obtienen como raíces 1 y -1, y queda como cociente tras las dos divisiones $2x^2+2x+2=2\left(x^2+x+1\right)$ (¡compruébalo!), que no tiene raíces reales.

Así, podemos factorizar $P(x)$ de la forma:

$$P(x)=2(x-1)(x+1)\left(x^2+x+1\right)$$

5. Fracciones algebraicas

Dados dos polinomios cualesquiera $P(x)$ y $Q(x)$ se llama *fracción algebraica* o *fracción polinómica* al cociente de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$. Es decir, una fracción algebraica es una expresión del tipo $F(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios llamados, como no cabría esperar otra cosa, numerador y denominador de la fracción algebraica.

Tal y como se hizo con los polinomios, dada una fracción algebraica $F(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se llama *valor numérico de la fracción algebraica* para $x=a$, y se escribe $F(a)=\dfrac{P(a)}{Q(a)}$ al número real que se obtiene al sustituir la variable *x* por el número real *a*.

Ejemplo

El valor numérico de $F(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{2x^3-6x^2+x-4}{x^2-x+2}$ para $x=-2$ es

$$F(-2)=\frac{P(-2)}{Q(-2)}=\frac{2(-2)^3-6(-2)^2+(-2)-4}{(-2)^2-(-2)+2}=\frac{2(-8)-6\cdot4-2-4}{4+2+2}=$$

$$=\frac{-16-24-2-4}{8}=\frac{46}{8}=\frac{23}{4}$$

Cuando al hacer el valor numérico de una fracción algebraica, el denominador resulta ser cero, diremos en general que *no existe* el valor numérico de la fracción, ya que no tiene sentido la división por cero. Veremos en el siguiente apartado en qué casos sí tiene sentido dicho valor numérico.

Los valores de x para los cuales no existe el valor numérico en una fracción algebraica son las raíces del denominador, es decir, los valores para los que el denominador se hace cero.

Ejemplo

La fracción algebraica $\dfrac{5}{x^2-9}$ toma valores numéricos para todos los números reales, excepto $x=3$ y $x=-3$, que anulan el denominador.

5.1. Fracciones algebraicas equivalentes. Razones algebraicas

Dos fracciones algebraicas son *equivalentes* cuando el producto de medios es igual al producto de extremos:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{R(x)}{S(x)}\Leftrightarrow P(x)S(x)=Q(x)R(x)$$

Esta definición de equivalencia extiende la que ya se conocía para números racionales. El conjunto formado por todas las fracciones algebraicas equivalentes a una dada se llama *razón algebraica*. En adelante, tal y como se hace en la práctica, la palabra *fracción* se toma como sinónima de *razón*, ya que una fracción particular determina todo el conjunto de fracciones algebraicas equivalentes

5.2. Simplificación de fracciones algebraicas

Simplificar una fracción algebraica $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ consiste en:

1. Descomponer en factores el numerador y el denominador.
2. Suprimir los factores comunes que aparezcan.

Cualquier fracción $\dfrac{R(x)}{S(x)}$ que se obtenga tras simplificar $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es equivalente a ésta.

Una fracción algebraica es *irreducible* cuando no puede simplificarse más. En este caso se dice que el numerador y el denominador son polinomios *primos entre sí*.

Ejemplo

$$\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{x^2+x+1}{x+1}$$

5.3. Verdadero valor de una fracción algebraica

Consideremos la fracción algebraica $\dfrac{2x-2}{x^2-x}$. Esta fracción toma valores numéricos para todos los valores de x, excepto para los que anulan el denominador, que son $x = 0$ y $x=1$.

Para $x=0$ tenemos: $\dfrac{2\cdot 0-2}{0^2-0}=\dfrac{0-2}{0-0}=\dfrac{-2}{0}$, que carece de sentido.

Para $x=1$ tenemos: $\dfrac{2\cdot 1-2}{1^2-1}=\dfrac{2-2}{1-1}=\dfrac{0}{0}$, que carece también de sentido.

En este segundo caso, simplificando se tiene: $\dfrac{2x-2}{x^2-x}=\dfrac{2(x-1)}{x(x-1)}=\dfrac{2}{x}$. Por tanto las fracciones $\dfrac{2x-2}{x^2-x}$ y $\dfrac{2}{x}$ son equivalentes (compruébese que el producto de extremos es igual al producto de medios).

¿Qué sucede pues con los valores numéricos?

Hemos visto que la fracción dada $\dfrac{2x-2}{x^2-x}$ no tiene valor numérico para $x=1$ ya que aparece la expresión $\dfrac{0}{0}$. La fracción equivalente $\dfrac{2}{x}$ sí que tiene para $x=1$ valor numérico y es 2.

Parece entonces conveniente asociar a la fracción dada, para $x=1$, el valor numérico 2, ya que de este modo también son equivalentes desde el punto de vista numérico. Este valor dado por definición recibe el nombre de *verdadero valor* de la fracción para $x=1$.

En general, si al hacer el valor numérico para $x=a$ de una fracción algebraica $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ aparece la expresión $\dfrac{0}{0}$, simplificaremos la fracción hasta obtener otra equivalente e irreducible $\dfrac{R(x)}{S(x)}$. Diremos que el *verdadero valor* para $x=a$ de la fracción $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es el valor numérico para $x=a$ de la fracción irreducible $\dfrac{R(x)}{S(x)}$.

Ejemplo

Al hacer el valor numérico de la fracción algebraica $\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ para $x=2$ aparece la expresión $\dfrac{0}{0}$. Simplificamos la fracción:

$$\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\frac{(x+2)(x-2)}{(x-3)(x-2)}=\frac{x+2}{x-3}$$

El valor numérico de la fracción equivalente $\dfrac{x+2}{x-3}$ para x = 2 es –4. Este es el verdadero valor de la fracción inicial para $x=2$.

5.4. Reducción de fracciones algebraicas a común denominador

Reducir dos o más fracciones algebraicas a común denominador es hallar otras fracciones, equivalentes a las primeras, que tengan todas ellas el mismo denominador.

El método a seguir es el mismo que el utilizado en las fracciones numéricas.

Ejemplo

Reduzcamos a común denominador las siguientes fracciones algebraicas:

$$\frac{2x}{x^2-1},\ \frac{3x-2}{x^3-3x+2},\ \frac{2}{x^3+x^2-x-1}.$$

Factorizamos los denominadores:

$x^2-1=(x+1)(x-1)$; $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$; $x^3+x^2-x-1=(x+1)^2(x-1)$

El mínimo común múltiplo de ellos es (“comunes elevados al mayor exponente y no comunes”): $(x-1)^2(x+1)^2(x+2)=x^5+2x^4-2x^3-4x^2+x+1$. Por tanto

$$\frac{2x}{x^2-1}=\frac{2x}{(x+1)(x-1)}=\frac{2x(x-1)(x+1)(x+2)}{(x-1)^2(x+1)^2(x+2)}=\frac{2x^4+4x^3-2x^2-4x}{x^5+2x^4-2x^3-4x^2+x+2}$$

$$\frac{3x-2}{x^3-3x+2}=\frac{3x-2}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{(3x-2)(x+1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2(x+2)}=\frac{3x^3+4x^2-x-2}{x^5+2x^4-2x^3-4x^2+x+2}$$

$$\frac{2}{x^3+x^2-x-1}=\frac{2}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{2(x-1)(x+2)}{(x-1)^2(x+1)^2(x+2)}=\frac{2x^2+2x-4}{x^5+2x^4-2x^3-4x^2+x+2}$$

5.5. Suma y resta de fracciones algebraicas

La suma de fracciones algebraicas se define de forma análoga a como se hace con números racionales.

La suma de dos fracciones algebraicas que tienen igual denominador es otra fracción algebraica que tiene por numerador la suma de los numeradores y por denominador el denominador común

$$\frac{P(x)}{Q(x)}+\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)+R(x)}{Q(x)}$$

Si las fracciones algebraicas no tienen el mismo denominador, para poder sumarlas hay que reducirlas previamente a común denominador, tal y como hemos visto en el apartado anterior.

Para sumar fracciones algebraicas es conveniente simplificar todas ellas antes de comenzar la operación. Esto hará que los cálculos sean mucho más sencillos.

La suma de fracciones algebraicas cumple las mismas propiedades que la suma de números reales: es asociativa, conmutativa, existe un elemento neutro que es la *fracción cero* (aquella cuyo numerador es cero), y además cada fracción tiene su opuesta.

Dos fracciones algebraicas son opuestas cuando su suma es 0. Por tanto la fracción opuesta de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es $-\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{-P(x)}{Q(x)}$, que se obtiene cambiando de signo todos los sumandos del numerador.

La resta de fracciones se define pues de igual manera a como se definió la resta de números reales, es decir, para restar dos fracciones algebraicas se suma la primera con la opuesta de la segunda.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{Q(x)}+\left(-\frac{R(x)}{Q(x)}\right)=\frac{P(x)+(-R(x))}{Q(x)}=\frac{P(x)-R(x)}{Q(x)}$$

Ejemplo

Hagamos la siguiente operación con las fracciones algebraicas del ejemplo anterior:

$$\frac{2x}{x^2-1}-\frac{3x-2}{x^3-3x+2}-\frac{2}{x^3+x^2-x-1}=\frac{2x^4+4x^3-2x^2-4x}{x^5+2x^4-2x^3-4x^2+x+2}-$$

$$-\frac{3x^3+4x^2-x-2}{x^5+2x^4-2x^3-4x^2+x+2}-\frac{2x^2+2x-4}{x^5+2x^4-2x^3-4x^2+x+2}=$$

$$=\frac{\left(2x^4+4x^3-2x^2-4x\right)-\left(3x^3+4x^2-x-2\right)-\left(2x^2+2x-4\right)}{x^5+2x^4-2x^3-4x^2+x+2}=$$

$$=\frac{2x^4+4x^3-2x^2-4x-3x^3-4x^2+x+2-2x^2-2x+4}{x^5+2x^4-2x^3-4x^2+x+2}=$$

$$=\frac{2x^4+x^3-8x^2-5x+6}{x^5+2x^4-2x^3-4x^2+x+2}$$

El último paso sería intentar simplificar la fracción algebraica que sale como resultado, caso de que numerador y denominador tuvieran factores comunes.

5.6. Producto y cociente de fracciones algebraicas

El producto de dos fracciones algebraicas es otra fracción algebraica que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{P(x)R(x)}{Q(x)S(x)}$$

Al igual que como se comentó en el apartado anterior, para multiplicar fracciones algebraicas es conveniente simplificar todas ellas antes de comenzar la operación. Esto hará que los cálculos sean mucho más sencillos.

El producto de fracciones algebraicas cumple las mismas propiedades que el producto de números reales: es asociativo, conmutativo, existe un elemento neutro que es la *fracción unidad* (aquella cuyo numerador y denominador son iguales y que coincide con el número 1), y además cada fracción no nula tiene su inversa.

Dos fracciones algebraicas son inversas cuando su producto es 1. Por tanto la fracción inversa de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es $\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)^{-1}=\frac{Q(x)}{P(x)}$.

La división de fracciones se define pues de igual manera a como se definió la división de números reales, es decir, para dividir dos fracciones algebraicas se multiplica la primera por la inversa de la segunda.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\div\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot\left(\frac{R(x)}{S(x)}\right)^{-1}=\frac{P(x)}{Q(x)}\frac{S(x)}{R(x)}=\frac{P(x)S(x)}{Q(x)R(x)}$$

Ejemplo

- $\frac{x+1}{x^2-2}\frac{x-1}{x^2+2}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x^2-2)(x^2+2)}=\frac{x^2-1}{x^4-4}$
- $\frac{x+1}{x^2-2}\div\frac{x-1}{x^2+2}=\frac{(x+1)(x^2+2)}{(x^2-2)(x-1)}=\frac{x^3+x^2+2x+2}{x^3-x^2-2x+2}$
- $\frac{x-1}{x^2-1}\div\frac{x+1}{x^2+2x+1}=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}\div\frac{x+1}{(x+1)^2}=\frac{1}{x+1}\div\frac{1}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}=1$

Ejercicios y problemas

1. Calcula el valor numérico de $P(x)=3x^3-2x^2+x+6$ para:

a) $x=-2$ **b)** $x=0$ **c)** $x=3$

2. Dados $P(x)=5x^2-3x+6$, $Q(x)=6-3x^2+x^3-5x^4$ y $R(x)=-x^5+3x^4-6x^2+4$, efectúa las siguientes operaciones:

a) $P(x)+Q(x)$ **b)** $P(x)+R(x)-Q(x)$

c) $P(x)Q(x)$ **d)** $P(x)(-R(x))$

e) $2P(x)-Q(x)R(x)$ **f)** $(P(x))^2-5R(x)$

3. Efectúa las siguientes divisiones:

a) $(3x^4-6x^3+2x^2-1)\div(x-4)$

b) $(3x^5-2x^3+7x^2-2x)\div(x^3+3x^2-1)$

c) $(3x^4+5x^3+2x+3)\div(x^2-3x+2)$

d) $(6x^5-3x^4-2x^3+20x^2-12x+14)\div(3x^3-2x^2+3)$

e) $(6x^3-4x^2+2x-2)\div(x^2+x+1)$

f) $(8x^5-6x^3+8)\div(2x-4)$

g) $(2x^5-2x^3+6x^2-4x+12)\div(2x^2-4)$

4. Dados los polinomios $P(x)=\frac{5}{2}x^3+\frac{3}{5}x^2-\frac{1}{3}x+6$, $Q(x)=\frac{1}{5}x^2-\frac{4}{3}x+2$ calcula: $P(x)+Q(x)$, $P(x)Q(x)$ y $P(x)\div Q(x)$.

5. Realiza las siguientes divisiones utilizando la regla de Ruffini:

a) $(x^4+x^3+x^2+x+1)\div(x+1)$

b) $(2x^4+2)\div(x-1)$

c) $(5-3x+4x^2+3x^3)\div(x+2)$

d) $(6x^2-2x-6+5x^4-3x^3)\div(x-1)$

e) $(12x^3-24x^2-3x+6)\div\left(x-\frac{1}{2}\right)$

f) $(80-20x-20x^2+5x^3)\div(x+2)$

6. Utilizando la regla de Ruffini, calcula el valor numérico del polinomio $P(x)=5x^3+2x^2-3x+4$ para $x=-1$, $x=2$ y $x=4$.

7. Efectúa las siguientes divisiones utilizando la regla de Ruffini:

a) $(4x^3-6x^2+3)\div(2x-1)$

b) $(9x^4-12x^2+5x-6)\div(3x-1)$

c) $(10x^3+15x^2-x+2)\div(5x+2)$

8. Comprueba cuales de los siguientes valores son raíces del polinomio $P(x)=x^4-1$:

a) $x=2$ **b)** $x=-1$ **c)** $x=-3$ **d)** $x=1$

9. Encuentra las raíces enteras del polinomio $P(x)=x^3+3x^2-4x-12$.

10. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $P(x)=2x^3-2x^2-8x+8$

b) $Q(x)=6x^3-11x^2+6x-1$

c) $R(x)=x^3-12x^2+47x-60$

d) $S(x)=x^4+2x^3-2x^2-4x+4$

e) $T(x)=3x^3+9x^2-12x-36$

f) $U(x)=x^4-25x^2+144$

11. Halla un polinomio cuyas raíces sean 1, 2, –3 y 0.

12. Calcula el máximo común divisor de las siguientes parejas de polinomios y simplifica las fracciones algebraicas $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$:

a) $P(x)=x^3-2x^2-x+2$ y $Q(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+4$

b) $P(x)=x^3+x^2-x-1$ y $Q(x)=x^3-x$

c) $P(x)=2x^6-2x^2$ y $Q(x)=3x^3-3x^2+3x-3$

13. Calcula el mínimo común múltiplo de las siguientes parejas de polinomios:

a) $P(x)=x^3-2x^2-x+2$ y $Q(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+4$

b) $P(x)=2x^2-2$ y $Q(x)=3x^2-6x+3$

c) $P(x)=2x^3+6x^2-8x-24$ y $Q(x)=4x^3+16x^2-12x-72$

14. Si $P(x)=5x^3-2ax^2+5x-9$ y sabiendo que su valor numérico para $x=-1$ es 25, calcula el valor de a.

15. Encuentra un polinomio $P(x)$ de segundo grado si se sabe que el coeficiente del término de primer grado es dos unidades mayor que el del término de segundo grado; el valor numérico para $x=0$ es 6 y $P(1)=14$.

16. Si tenemos los polinomios $P(x)=2x^3+ax^2+3x-1$, $Q(x)=bx^3-5x^2+2x-6$ y $R(x)=6x^3+2x^2-cx+d$, encuentra los valores de *a*, *b*, *c* y *d* para que se cumpla que $P(x)+Q(x)=R(x)$.

17. Halla, si existe, el valor de *a* para que se cumpla la igualdad:

$$(2x^2-2)(3x+a)=(x^2+3x+2)(ax-6)$$

18. Determina un polinomio de primer grado P(x) que cumpla la siguiente igualdad:

$$(x^2+2)P(x)+5x^2=2x^3+x^2+4x-8$$

19. Si $P(x)=ax+b$, calcula el cuadrado y el cubo de $P(x)$.

20. Demuestra que el polinomio $P(x)=x^2+1$ no es divisible por ningún polinomio de primer grado.

21. Encuentra el valor de *a* para que $P(x)=x^4-1$ sea divisible por $Q(x)=x^2+a$.

22. Calcula *a* para que el polinomio $P(x)=3x^4-8x^2-7x-a$ sea divisible por $Q(x)=x+3$.

23. Sin efectuar ninguna división, calcula el valor de *a* para el cual el polinomio $P(x)=ax^4-3x^2+6x+8$ es divisible por $Q(x)=x-2$.

24. Encuentra para qué valor de *a* $P(x)=x^3-ax^2+x+6$ es divisible por $Q(x)=x+2$, sin hacer la división.

25. Halla un polinomio de segundo grado cuyo término independiente sea 3, sabiendo que los restos que se obtienen al dividirlo por $x+3$ y por $x-2$ son 72 y 17, respectivamente.

26. Calcula *a* y *b* para que $P(x)=2x^3+ax^2+bx+6$ sea divisible por $x-2$ y por $x-3$.

27. Los beneficios diarios de producción, en euros, en una fábrica de piezas de madera vienen dados por el polinomio $P(x)=-80x+x^2$, siendo x el número de piezas fabricadas.

- **a)** ¿Qué beneficio se obtiene un día que produce 150 piezas?
- **b)** Factoriza el polinomio.
- **c)** Utilizando la factorización anterior, deduce cuál es el número mínimo de piezas que deben fabricarse en un día para que los beneficios sean positivos, es decir, para que existan ganancias.

28. Descompón en factores $P(x)=x^4+ax^2+4$, sabiendo que $r=2$ es una raíz.

29. Halla un polinomio de segundo grado tal que al elevarlo al cuadrado se obtenga $P(x)=4x^4+16x^3+40x^2+48x+36$.

30. Halla el verdadero valor de las fracciones siguientes:

a) $\dfrac{x^2-1}{x+1}$ para $x=-1$

b) $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ para $x=-1$

c) $\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$ para $x=3$

d) $\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-8x+15}$ para $x=5$

e) $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-8x+7}$ para $x=1$

31. Reduce las siguientes fracciones a común denominador

a) $\dfrac{x+1}{x^2-1}$, $\dfrac{x^2}{x+1}$

b) $\dfrac{1}{x+2}$, $\dfrac{1}{x-2}$, $\dfrac{4}{x^2-4}$

32. Simplifica todo lo posible las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{x^3-10x^2+25x}{2x^4-50x^2}$

b) $\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-2x^2-4x+8}$

c) $\dfrac{x^4-625}{x^4-50x^2+625}$

d) $\dfrac{x^4-8x^3+24x^2-32x+16}{x^4-8x^2+16}$

33. Opera y simplifica:

a) $\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{3x+1}{x-1}-\dfrac{1-x}{x^2-1}$

b) $\dfrac{4}{1+x}+\dfrac{x}{1+x^2}-\dfrac{x+1}{x-1}$

c) $\dfrac{3}{2x-4}+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{x+10}{2x^2-8}$

d) $\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\left(x^4+x^3\right)$

e) $\left(\frac{1+x}{1-x}+\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{3}{4x}-\frac{x}{4}-x\right)$

f) $\left(x+\frac{x}{x-1}\right)\div\left(x-\frac{x}{x-1}\right)$

Cuestiones

1. Si $P(x)=ax^3+bx^2+C(x)+4$ tiene una raíz entera *r*, ¿podemos afirmar que *r* es un divisor de 12?

2. Si $M(x)=x^2-3x+2$ es el máximo común divisor de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, ¿podemos afirmar que ambos polinomios son divisibles por $x-1$ y por $x-2$?

3. Si $M(x)=(x-1)^2(x-2)(x-3)$ es el mínimo común múltiplo de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, ¿podemos afirmar que ambos polinomios son divisibles por $(x-1)^2$?, ¿y que al menos uno de ellos lo es?

4. Escribe la factorización de un polinomio que tenga por raíces 2, −3 y 4 y tal que al dividirlo por $x-1$ el resto de la división sea 36.

5. Si el valor numérico de un polinomio $P(x)$ para $x=5$ es cero, di cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

a) $P(x)$ es divisible por $x-5$.

b) $P(5)=5$.

c) $P(5)=0$.

d) En la descomposición de $P(x)$ aparece el factor $x-5$.