

1. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas, dando todas las posibles soluciones:

a) $\cos 4x + \cos 2x = \cos x$

b) $4\operatorname{sen} x + 2\cos 2x = 3$

c) $\operatorname{cosec} x - \cot g x = \sqrt{3}$

Solución:

a) Por un lado $\cos 4x = \cos(3x + x) = \cos 3x \cdot \cos x - \operatorname{sen} 3x \cdot \operatorname{sen} x$ y, por otro, $\cos 2x = \cos(3x - x) = \cos 3x \cdot \cos x + \operatorname{sen} 3x \cdot \operatorname{sen} x$. Sumando las dos igualdades anteriores obtenemos $\cos 4x + \cos 2x = 2\cos 3x \cdot \cos x$, lo que viene a decir que la ecuación que hemos de resolver es equivalente a $2\cos 3x \cdot \cos x = \cos x$, o lo que es lo mismo, $2\cos 3x \cdot \cos x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(2\cos 3x - 1) = 0$. Hay dos posibilidades.

Una, que $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = 90^\circ + 180^\circ k$ (en radianes sería $\frac{\pi}{2} + k\pi$). La otra es que

$$2\cos 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x = 60^\circ + 360^\circ k \text{ o bien } 3x = 300^\circ + 360^\circ k \Leftrightarrow$$

$x = 20^\circ + 120^\circ k$ (en radianes sería $\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$) o bien $x = 100^\circ + 120^\circ k$ (en radianes

sería $\frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$)

b) $4\operatorname{sen} x + 2\cos 2x = 3 \Leftrightarrow 4\operatorname{sen} x + 2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 3 \Leftrightarrow 4\operatorname{sen} x + 2(1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 3 \Leftrightarrow 4\operatorname{sen} x + 2(1 - 2\operatorname{sen}^2 x) = 3 \Leftrightarrow -4\operatorname{sen}^2 x + 4\operatorname{sen} x - 1 = 0$. Llamando $\operatorname{sen} x = t$, tenemos $-4t^2 + 4t - 1 = 0$, ecuación de segundo grado cuya solución es

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-4)(-1)}}{2(-4)} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}. \text{ Así pues } \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = 30^\circ + 360^\circ k$ o bien $x = 120^\circ + 360^\circ k$ (en radianes las soluciones serían

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ o bien $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$).

c) $\operatorname{cosec} x - \cot g x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow 1 - \cos x = \sqrt{3} \operatorname{sen} x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - \cos x = \sqrt{3} \sqrt{1 - \cos^2 x} \Leftrightarrow 1 - \cos x = \sqrt{3 - 3\cos^2 x}$. Elevando ambos miembros al cuadrado se tiene que $1 - 2\cos x + \cos^2 x = 3 - 3\cos^2 x \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4\cos^2 x - 2\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$. Llamando $\cos x = t$, tenemos

$2t^2 - t - 1 = 0$, ecuación de segundo grado cuya solución es $t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4} = [\text{dos soluciones: } t = -\frac{1}{2} \text{ y } t = 1]. \text{ Si } t = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 120^\circ + 360^\circ k$ o bien $x = 240^\circ + 360^\circ k$ (en radianes $x = \frac{2\pi}{3} +$

$2k\pi$ o bien $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$). La segunda solución habría que desecharla pues

$$\begin{aligned} \operatorname{cosec}240^\circ &= \frac{1}{\operatorname{sen}240^\circ} = \frac{1}{-\operatorname{sen}60^\circ} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{y} \quad \operatorname{cotg}240^\circ = \\ &= \operatorname{cotg}60^\circ = \frac{\operatorname{cos}60^\circ}{\operatorname{sen}60^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad \text{Así pues} \quad \operatorname{cosec}240^\circ - \operatorname{cotg}240^\circ = \\ &= -\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}. \quad \text{Lo que ocurre es que al elevar al cuadrado los} \\ &\text{signos se convierten a positivos.} \end{aligned}$$

Si $t = 1 \Rightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0^\circ + 360^\circ k = 360^\circ k$ (en radianes $x = 2k\pi$). Esta última solución habría que desecharla también pues $\operatorname{cosec}x$ y $\operatorname{cotg}x$ no tienen sentido para $x = 0^\circ$ (no tiene sentido la división por cero).

2. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones, dando las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$:

a)
$$\begin{cases} \cos x \cdot \cos y = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y \\ x - y = 30^\circ \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y + \operatorname{sen}^2 x = 2 \\ y + \operatorname{cos}^2 x = 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ \cos 2x + \cos 2y = -1 \end{cases}$$

Solución:

- a) Como $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y$, y de la primera ecuación se deduce que $\cos x \cdot \cos y - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y = 0$, entonces $\cos(x + y) = 0$. De la segunda ecuación deducimos que $x = 30^\circ + y$. Sustituyendo en la igualdad anterior $\cos(30^\circ + 2y) = 0 \Leftrightarrow 30^\circ + 2y = 90^\circ \Leftrightarrow 2y = 60^\circ \Leftrightarrow y = 30^\circ$. Como $x = 30^\circ + y \Rightarrow x = 60^\circ$. En radianes $x = \frac{\pi}{3}$, $y = \frac{\pi}{6}$
- b) Restando ambas ecuaciones se obtiene $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{cos}^2 x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = -1$
 $\operatorname{cos}2x = -1 \Leftrightarrow 2x = 180^\circ \Leftrightarrow x = 90^\circ$. En radianes $x = \frac{\pi}{2}$. Sustituyendo en la primera ecuación tenemos $y + \operatorname{sen}^2 90^\circ = 2 \Leftrightarrow y + 1 = 2 \Leftrightarrow y = 1$.
- c) Observemos que $\operatorname{cos}2x = \operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{cos}^2 x - (1 - \operatorname{cos}^2 x) = 2\operatorname{cos}^2 x - 1$. Del mismo modo $\operatorname{cos}2y = 2\operatorname{cos}^2 y - 1$. Sustituyendo en la segunda ecuación tenemos $2\operatorname{cos}^2 x - 1 + 2\operatorname{cos}^2 y - 1 = -1 \Leftrightarrow 2\operatorname{cos}^2 x + 2\operatorname{cos}^2 y = 1$. Despejando $\operatorname{cos}x$ de la primera ecuación y sustituyendo en esta última obtenemos $2(1 - \operatorname{cos}y)^2 + 2\operatorname{cos}^2 y = 1 \Leftrightarrow 2(1 + \operatorname{cos}^2 y - 2\operatorname{cos}y) + 2\operatorname{cos}^2 y = 1 \Leftrightarrow 4\operatorname{cos}^2 y - 4\operatorname{cos}y + 1 = 0$. Haciendo $\operatorname{cos}y = t$ tenemos la ecuación $4t^2 - 4t + 1 = 0$ (la misma que aparece en el ejercicio 1, apartado b), cuya solución es $t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{cos}y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = 60^\circ$. Como

$$\cos x = 1 - \cos y \Rightarrow \cos x = 1 - \cos 60^\circ = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 60^\circ. \text{ En radianes}$$

$$x = y = \frac{\pi}{3}.$$

Las soluciones se pedían en el intervalo $[0, 2\pi]$. Pero, en general, si a las soluciones de los sistemas anteriores se les añade un número entero de vueltas, volvemos a tener soluciones de los mismos. Por ejemplo, en el apartado a) las soluciones podrían darse así:

$$\text{así: } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi ; y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

3. Dado el triángulo ABC con $a = 1$ m., $B = 30^\circ$ y $C = 45^\circ$:

a) Resuelve el triángulo.

b) Calcula su área.

Solución:

a) En primer lugar $A = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$. Por el teorema de los senos

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin 105^\circ} = \frac{b}{\sin 30^\circ} \Leftrightarrow b = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} \approx 0,512 \text{ m. De manera}$$

similar $\frac{1}{\sin 105^\circ} = \frac{c}{\sin 45^\circ} \Leftrightarrow c = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} \approx 0,732$ m. Esto resuelve el triángulo.

b) Utilicemos una de las fórmulas para calcular el área de un triángulo:

$$A = \frac{1}{2} a b \sin C = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0,512 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,181 \text{ m}^2.$$

4. Contesta a los dos apartados siguientes:

a) Calcula la siguiente expresión, simplificando el resultado: $\frac{\cot 150^\circ - \operatorname{cosec} 315^\circ}{\sec 120^\circ - \tan 240^\circ}$

b) Simplifica todo lo que puedas la expresión $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha}$

Solución:

$$\text{a) } \frac{\cot 150^\circ - \operatorname{cosec} 315^\circ}{\sec 120^\circ - \tan 240^\circ} = \frac{\frac{\cos 150^\circ}{\sin 150^\circ} - \frac{1}{\sin 315^\circ}}{\frac{1}{\cos 120^\circ} - \frac{\sin 240^\circ}{\cos 240^\circ}} = \frac{\frac{-\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} - \frac{1}{-\sin 45^\circ}}{\frac{1}{-\cos 60^\circ} - \frac{-\sin 60^\circ}{-\cos 60^\circ}} =$$

$$\frac{\frac{-\sqrt{3}/2}{1/2} + \frac{1}{\sqrt{2}/2}}{\frac{1}{-1/2} - \frac{\sqrt{3}/2}{1/2}} = \frac{-\sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{2}}}{-2 - \sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{2}}{-2 - \sqrt{3}} = [\text{multiplicando numerador y$$

$$\text{denominador por } -3] = \frac{3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} = [\text{racionalizando: multiplicando numerador y$$

denominador por $\sqrt{3}$] = $\frac{9-3\sqrt{6}}{15}$ = [simplificando aún más: dividiendo numerador y denominador entre 3] = $\frac{3-\sqrt{6}}{5}$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha} &= \frac{\sin \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha + 2\cos^2 \alpha} = \\ &= \frac{\sin \alpha(1 + 2\cos \alpha)}{\cos \alpha(1 + 2\cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha \end{aligned}$$

5. Realiza la siguiente operación con números complejos, expresando el resultado en

forma polar y trigonométrica: $\sqrt[5]{\frac{-8-8\sqrt{3}i}{(-2\sqrt{3}+2i)^2}}$

Solución:

Por un lado se tiene $(-2\sqrt{3}+2i)^2 = (-2\sqrt{3})^2 + (2i)^2 + 2(-2\sqrt{3})(2i) = 12 - 4 - 8\sqrt{3}i = 8 - 8\sqrt{3}i$. Por tanto $\frac{-8-8\sqrt{3}i}{(-2\sqrt{3}+2i)^2} = \frac{-8-8\sqrt{3}i}{8-8\sqrt{3}i} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{(-1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$

$= \frac{-(1-3+2\sqrt{3}i)}{1-3i^2} = \frac{-(-2+2\sqrt{3}i)}{4} = \frac{2-2\sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. La parte real de este

número complejo es $x = \frac{1}{2}$ y la parte imaginaria es $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. El módulo del número

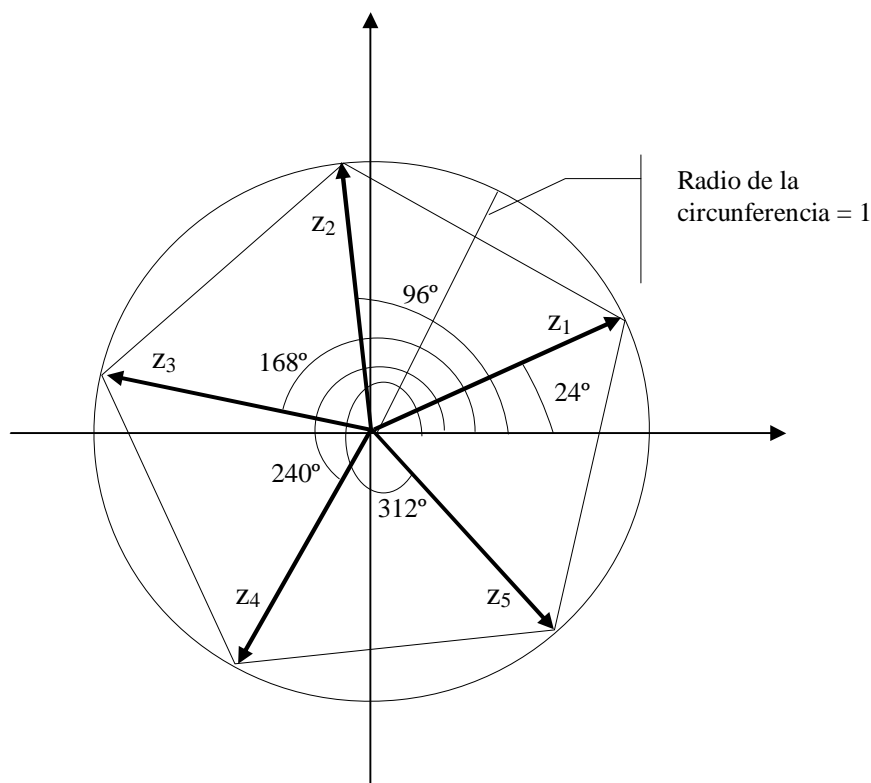
complejo será pues $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$, y el argumento del mismo será

$\alpha = \arctg \frac{y}{x} = \arctg \frac{-\sqrt{3}/2}{1/2} = \arctg(-\sqrt{3}) = 120^\circ$. Así, el número complejo del cual

tenemos que hallar su raíz quinta es, en forma polar, $z = 1_{120^\circ}$. Hay cinco soluciones para $\sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{1_{120^\circ}}$. Todas tienen módulo $r = 1$ (pues la raíz quinta de 1 es 1) y

argumento $\frac{\alpha}{n} + \frac{360^\circ k}{n} = \frac{120^\circ}{5} + \frac{360^\circ k}{5} = 24^\circ + 72^\circ k$. Para $k = 0, 1, 2, 3, 4$ obtenemos

los cinco argumentos (hasta formar un pentágono regular), que son $\alpha_1 = 24^\circ$, $\alpha_2 = 96^\circ$, $\alpha_3 = 168^\circ$, $\alpha_4 = 240^\circ$ y $\alpha_5 = 312^\circ$. Las cinco raíces son pues, en forma polar: $z_1 = 1_{24^\circ}$, $z_2 = 1_{96^\circ}$, $z_3 = 1_{168^\circ}$, $z_4 = 1_{240^\circ}$ y $z_5 = 1_{312^\circ}$ (ver figura); y en forma binómica $z_i = r_i(\cos\alpha_i + i\sin\alpha_i)$. Como los módulos de todas las raíces son uno quedarían en forma binómica: $z_1 = \cos 24^\circ + i\sin 24^\circ$, $z_2 = \cos 96^\circ + i\sin 96^\circ$, $z_3 = \cos 168^\circ + i\sin 168^\circ$, $z_4 = \cos 240^\circ + i\sin 240^\circ$ y $z_5 = \cos 312^\circ + i\sin 312^\circ$



6. Encuentra todas las posibles soluciones de la siguiente ecuación en forma binómica:
 $z^5 + 125z^2 = 0$.

Solución:

Esta ecuación es la misma que $z^2(z^3 + 125) = 0$. Hay que encontrar números cuyo cuadrado sea 0 y cuyo cubo sea -125 . En el primer caso es claro que $z = 0$ (se dice que es solución "doble"). En el segundo $z = \sqrt[3]{-125}$. Una solución es claramente $z = -5$.

Nos faltan dos. El módulo es $r = \sqrt[3]{125} = 5$. Argumento: $\alpha = \frac{180^\circ + 360^\circ k}{3}$.

Aquí están las tres soluciones:

Si $k = 0 \Rightarrow \alpha = 60^\circ$ y la solución es $5_{60^\circ} = 5(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$.

Si $k = 1 \Rightarrow \alpha = 180^\circ$ y la solución es $5_{180^\circ} = 5(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = -5$ (esta solución ya había salido de manera natural).

Si $k = 2 \Rightarrow \alpha = 300^\circ$ y la solución es $5_{300^\circ} = 5(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ) = \frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$.